

ಸುಬೋಧ
ಬೀಜಗಣಿತ

Copyright ಭಾಗ ೩ ೧೯೭೦

ಕೆ.ಪಿ. ಮತ್ತು ಮನೋಹರ



೧೮ ಲಾಂಗಮನ್

512

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

ಮೂರನೆಯ ಭಾಗ

III
1954 1210

ಲೇಖಕರು

ಪ್ರಾಂ. ಶ್ರೀ. ಕಟ್ಟಿ, ಎಮ್. ಎ. (ಕೆಂಬೆಲ್),

ಮಾಜೀ ಸೀನಿಯರ್ ಸ್ಕಾಲರ್, ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಲ್ ಕಾಲೇಜು, ಕೇಂಬ್ರಿಜ್.
ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಎಲ್‌ಫಿನ್‌ಸ್ಟನ್ ಕಾಲೇಜು, ಮುಂಬಯಿ.
ಮತ್ತು ಮಾಜೀ ಪ್ರಧಾನ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕೆಂಡರಿ ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಲ್ ಕಾಲೇಜು, ಬೆಳಗಾವಿ.

ಮತ್ತು

ವಾ. ಪ್ರಾಂ. ಖಾನೋಲಿಕರ, ಎಮ್. ಎ. (ಲಂಡನ್),

ಶಿಕ್ಷಣ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕೆಂಡರಿ ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಲ್ ಕಾಲೇಜು, ಬೆಳಗಾವಿ.
ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಣ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಇಂಡಿಯನ್ ಇನ್‌ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್
ಎಜ್ಯುಕೇಶನ್, ಮುಂಬಯಿ.

ಮತ್ತು ಆ. ಗ. ಬೀಜರ್ಸ ಕಾಲೇಜು, ಅಹಮದಾಬಾದ್.



ಓರಿಎಂಟೆ

ಮುಂಬಯಿ

ಲಾಂಗಮನ್

ಕಲಕತ್ತಾ

ಲಿಮಿಟೆಡ್

ಮದ್ರಾಸು

ಎಲ್ಲ ತರಹದ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಮಾಡರಿಗಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ
ತೋರಿಸಿದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದಲ್ಲಿ ಸುಲಭ, ಮಧ್ಯಮ
ತರಗತಿಯ ಮತ್ತು ಗಡುಜಾದ ಹೇರಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರಿಂದ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕತ್ತಿಗನುವರಿಸಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅವರು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು
ಅನ್ವದವಿದೆ.

ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅದಷ್ಟು ಉಪಯೋಗವುಳ್ಳದ್ದಾಗುವಂತೆ
ಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸಿದೆ. ಪುಸ್ತಕದ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿಸುವ
ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕಮಿತ್ರರು ಕೆಲವು ವಿಧಾಯಕ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ
ಅವುಗಳನ್ನು ಅವರದಿಂದ ಮತ್ತು ಅಭಾರಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಸ್ವೀಕರಿಸಲಾದೀತು.
ಅವರಂತೆಯೇ ದೃಷ್ಟಿಸ್ಪರ್ಶದೊಳಗಿಂದ ಜಾರಿದ ಮುದ್ರಣ ಮೋಷಗಳನ್ನೂ
ಮತ್ತು ಉತ್ತರಗಳೊಳಗಿನ ಬುಳಿದು ಹೋದ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನೂ ತೋರಿಸಿದರೆ
ನಾವು ಬಹಳ ಅಭಾರಿಯಾಗುವೆವು. ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪತ್ರವ್ಯವಹಾರವನ್ನು
ವಾ. ಪಾಂ. ಖಾನ್‌ದೋಲಕರ ಇವರ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಾಶಕರ ವಿಳಾಸಕ್ಕೆ
ಕಳಿಸದೇಕೆ.

ಕೆಲವು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳು

ಅನುಕೂಲ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು
ಮಾಡುವುದು= Suitable group-
ing.

ಅನುವಾಕ= Section
ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಭಜನೆಯನ್ನು
Splitting up a fraction into
partial fractions

ಅಕ್ಷ, ಸಮನ್ವೇಷಣಾಕ್ಷ= Axis
ಅದೇರ= Substitute
ಅದೇರಿಸು, ಉತ್ಪಾದಿಸು= To Sub-
stitute

ಅರಂಭಸ್ಥಾನ, ಪ್ರಸ್ಥಾನಬಿಂದು= Origin
ವಿಕೋಟಿಕ= Of the first
degree

ಕೋಟಿ, ಘಾತಸಂಖ್ಯೆ= Degree
ಕೋಟ್ಯಂತರ, ಕೋಟಿ= Ordinate
ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತ= Factor
theorem

ಚಕ್ರೀಯ= Cyclic
ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮ= Cyclic order
ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿ= Cyclic
expression

ಚರ= Variable
ಛೇದ= Intercept
ಬಿಂದು= Point of
intersection
ಟಿಕ= Of the third

ದ್ವಿಕೋಟಿಕ= Of the second

ಪರತಂತ್ರ, ಪರಾಧೀನ ಚರ= Dependent variable
ಪರಂಪರಿತ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ= Continued fraction

ಪಾದ= Quadrant
ಪ್ರತಿಸ್ಥಾನ= Substiute
ಪ್ರಭಾಗ ಜಾತಿ (ಮಿಶ್ರ) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ= Complex fraction

ಫಲ= Function
ಬಿಂದು= Point
ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು= To
plot a point
ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕ= Mixed number

ಭುಜಾಂತರ, ಭುಜ= Abscissa
ಮಾನ, ಏಕಾಂಕ= Unit
ಯಥಾಕ್ರಮ ಏಕೀಕರಣ= Successive grouping
ರೂಪಾಂತರಾಲೇಖ= Conversion

ರೇಖಾಲೇಖ= Line graph
ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದ= Quadratic
trinomial

ವಿಭಾಜಕ= Factor
ವಿಭಾಜ್ಯ= Multiple
ಶೇಷಸಿದ್ಧಾಂತ= Remainder
theorem

ಸಮಕೋಟಿ, ಸಮಘಾತ= Homogenous

ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ= Equian-
gular triangle

ಸಮಚ್ಛೇದ= Common

Denominator

ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ, ಸಂಮಿತ=

Symmetrical

ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತಿಯನ್ನು

ಮಾಡುವದು= To Satisfy an
equation

ಸಹನಿರ್ದೇಶಕ= Coordinate

ಸಂಗತ= Corresponding

ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ= Column graph

ಸ್ಥಿರಪದ= Constnt term

ಸ್ವತಂತ್ರ (ಸ್ವಾಧೀನ) ಚರ= In-
dependent variable

ಕ್ಷಿತಿಜಲಂಬ= Vertical

ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ= Horizontal

ಪ್ರಸ್ತುತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ
ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಜಿನ್ನಪ.

ಮೊದಲು ಕೆಳಗಿನ ತಿದ್ದುಪಡಿಯನ್ನು

ಪುಟ ಉದಾಹರಣೆ ಇಲ್ಲವೆ ಸಾಲು

ತಪ್ಪು

ಬಿಪ್ಪು

	ಉ.	೬	ಬ = ೧ಮ = ೩	ಬ = -೧, ಮ
೨೩	ಸಾ.	೧೯	೬೦೦-೧೨	೬೦೦-೧೨
೨೪	ಉ.	೧೧	೨೨೨	೨೨
೩೦	ಉ.	೧೨	-(ನ-೪ಮ)೩	(೪ನ-ಮ)೩
	ಉ.	೧೩	(ಯ+೨-ಸ)೩	(ಯ-೨-ಸ)೩
೩೪	ಉ.	೮	ಪಮ	ಪ೨ಮ೨
	ಉ.	೧೮	ಮ	ಮ೪
೪೧	ಉ.	೪	೯	೯೦
೬೫	ಉ.	೧೯	+ ೬	- ೬
೭೫	ಉ.	೩	ತ(೬-ನ೨)	ತ(೬೨-ನ೨)
೮೭	ಉ.	೨	೨೦	೩೦
	ಉ.	೪	೧೯ಯ	೫೮ಯ
೧೨೩	ಉ.	೨೩	೩೨ಮ೨	೫೨ಮ೨
	ಉ.	೨೩	೫೮+೨	೫೮-೨
೧೨೭	ಉ.	೧೪	+ ೨	- ೨
			೪ಯ೨+೧	೪ಯ೨-೧
೨೪೨	ಉ.	೧೮	- ೧	- ೧
			ಮ೨	ಮ೨

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

ಪ್ರಕರಣ	ಪುಟ
೧. ವಿಸ್ತಾರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂಶಗಳ ಉಪಯೋಗ	೧
೨. ಗುಣಪ್ರತ್ಯಯಗಳು (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದಾಗ)	೨೫
೩. ಗುಣಪ್ರತ್ಯಯಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳು	೫೦
೪. ಮ. ಸಾ. ವಿ- ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.	೭೬
೫. ಅಪೂರ್ಣತೆ	೧೦೧
೬. ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಪಾಠ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು	೧೫೭
೭. ಅಲೇಖ	೧೭೮
ಪರಿಚ್ಛೇದಕ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಗಳು (೧-೬)	೨೫೯
ಉತ್ತರಗಳು	೨೬೮

$$\begin{aligned}
 ೩. \quad (ಪ+ಮ)^೨ &\equiv ಪ^೨+೨ಪಮ+ಮ^೨ \\
 &\equiv ಪ^೨-೨ಪಮ+ಮ^೨+೪ಪಮ \\
 &\equiv (ಪ-ಮ)^೨+೪ಪಮ
 \end{aligned}$$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕಡಿ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 ೪. \quad (ಪ-ಮ)^೨ &\equiv ಪ^೨-೨ಪಮ+ಮ^೨ \\
 &\equiv ಪ^೨+೨ಪಮ+ಮ^೨-೪ಪಮ \\
 &\equiv (ಪ+ಮ)^೨-೪ಪಮ
 \end{aligned}$$

ಅಂದರೆಯೇ, ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ = ಆ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗ ಉಣಾ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕಡಿ.

$$\begin{aligned}
 ೫. \quad (ಪ+ಮ)^೨+(ಪ-ಮ)^೨ &\equiv ಪ^೨+೨ಪಮ+ಮ^೨+ಪ^೨- \\
 &\quad ೨ಪಮ+ಮ^೨ \equiv ೨ಪ^೨+೨ಮ^೨
 \end{aligned}$$

$$\therefore (ಪ^೨+ಮ^೨) \equiv \frac{1}{2} \{ (ಪ+ಮ)^೨+(ಪ-ಮ)^೨ \}$$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
 ೬. \quad (ಪ+ಮ)^೨-(ಪ-ಮ)^೨ &\equiv (ಪ^೨+೨ಪಮ+ಮ^೨) - \\
 &\quad (ಪ^೨-೨ಪಮ+ಮ^೨) \\
 &\equiv ಪ^೨+೨ಪಮ+ಮ^೨-ಪ^೨-೨ಪಮ-ಮ^೨ \\
 &\equiv ೪ ಪಮ.
 \end{aligned}$$

$$\therefore ಪಮ \equiv \frac{1}{4} \{ (ಪ+ಮ)^೨ - (ಪ-ಮ)^೨ \}$$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗ ಉಣಾ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ ಇದರ ಒಂದು ನಾಲ್ಕಾರುಶೇಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ.

೧.೨. ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯಸಮಗಳೊಳಗಿನ ಕೆಲವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉ. ೧. ಪ + ಮ = ೭ ಮತ್ತು ಪಮ = ೧೨ ಇದ್ದರೆ ಪ^೨ + ಮ^೨ = ?

$$ಪ + ಮ = (ಪ + ಮ)^೨ - ೨ ಪಮ \quad (೧)$$

$$= (೭)^೨ - ೨ \cdot ೧೨$$

$$= ೪೯ - ೨೪$$

$$= ೨೫.$$

ಉ. ೨. ನ - ಮ = ೪, ಮತ್ತು ನಮ = ೫ ಇದ್ದರೆ ನ^೨ + ಮ^೨ = ?

$$ನ + ಮ = (ನ - ಮ)^೨ + ೨ನಮ \quad (೨)$$

$$= ೪^೨ + ೨ \cdot ೫$$

$$= ೧೬ + ೧೦$$

$$= ೨೬.$$

ಉ. ೩. ಯ - $\frac{೧}{ಯ}$ = ೫ ಇದ್ದರೆ ಯ^೨ + $\frac{೧}{ಯ^೨}$ = ೨೭ ಎಂಬುದನ್ನು

ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

$$ಯ + \frac{೧}{ಯ} = (ಯ - \frac{೧}{ಯ})^೨ + ೨ಯ \cdot \frac{೧}{ಯ} \quad (೩)$$

$$= (೫)^೨ + ೨$$

$$= ೨೭.$$

ಉ. ೪. ನ + $\frac{೧}{ನ}$ = ೭, ಇದ್ದರೆ ನ^೨ + $\frac{೧}{ನ^೨}$ = ?

$$ನ + \frac{೧}{ನ} = (ನ + \frac{೧}{ನ})^೨ - ೨ನ \cdot \frac{೧}{ನ} \quad (೧)$$

$$= (೭)^೨ - ೨$$

$$= ೪೭.$$

ಉ. ೫. $ಕ-ಗ=೩$ ಮತ್ತು $ಕಗ=೨೮$ ಇದ್ದರೆ $(ಕ+ಗ)^೨ = ?$
 $(ಕ+ಗ)^೨ = (ಕ-ಗ)^೨ + ೪ ಕಗ$ (೩)
 $= ೩^೨ + ೪ \cdot ೨೮$
 $= ೯ + ೧೧೨$
 $= ೧೨೧.$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿವಂತೆ ಸಹ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವವು.

ಉ. ೧. $ಪ+ಮ=೨$
 ವರ್ಗ ಮಾಡಿ $ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ = ೪$
 $\therefore ಪ^೨ + ಮ^೨ + ೨ = ೪$ [$\because ಪಮ=೧$]
 ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ $ಪ^೨ + ಮ^೨ = ೪ - ೨ = ೨$.

ಇದೇ ರೀತಿಯಿಂದ ವರ್ಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೨. $ಯ = ೫$ ಮತ್ತು $ರ = ೩$ ಇದ್ದರೆ $೨೫ಯ^೨ - ೨೦ಯರ + ೪ರ^೨ = ?$
 $೨೫ಯ^೨ - ೨೦ಯರ + ೪ರ^೨ = (೫ಯ)^೨ - ೨(೫ಯ \cdot ೨ರ) + (೨ರ)^೨$
 $= (೫ಯ - ೨ರ)^೨$
 $= (೫ \times ೫ - ೨ \times ೩)^೨$
 $= (೨೫ - ೬)^೨$
 $= (೧೯)^೨$
 $= ೩೬೧.$

ಉ. ೩. $(ಪ+ಬ-ಮ)^೨ + ೨(ಪ+ಬ-ಮ)(ಪ-ಬ+ಮ) + (ಪ-ಬ+ಮ)^೨$ ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪ ಕೊಡಿ.
 $(ಪ+ಬ-ಮ)$ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು $ಯ$ ಒಂದೆಂದು ಮತ್ತು
 $(ಪ-ಬ+ಮ)$ ದ $ರ$ ಒಂದೆಂದು ಮಾಡಿದರೆ,

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ಯ}^2 + ೨ \text{ ಯರ} + \text{ರ}^2 \quad * \\
 &= (\text{ಯ} + \text{ರ})^2 \quad * \\
 &= \{ (\text{ಪ} + \text{ಬ ಮ}) + (\text{ಪ} - \text{ಬ} + \text{ಮ}) \}^2 \\
 &= (\text{೨ಪ})^2 \\
 &= ೪ಪ^2.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೮. $(\text{ಕಪ} - \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})^2 + (\text{ಕಪ} + \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})^2$
 $= ೨(\text{ಕಪ} - \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})(\text{ಕಪ} + \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})$
 ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿ.

$(\text{ಕಪ} - \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})$ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಯ ಎಂಬ ಮತ್ತು
 $(\text{ಕಪ} + \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})$ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ರ ಎಂಬ ಮಾಡಿದರೆ,
 $\text{ರಾಶಿಯು} = \text{ಯ}^2 + \text{ರ}^2 - ೨\text{ಯರ} \quad *$
 $= (\text{ಯ} - \text{ರ})^2 \quad *$
 $= \{ (\text{ಕಪ} - \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ}) (\text{ಕಪ} + \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ}) \}^2$
 $= (- ೨ \text{ ಗಬ})^2$
 $= ೪ \text{ ಗಬ}^2.$

* ಯ, ರ, ಈ ಅವೇಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೇ ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಿಡಲು
 ಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿ.

೧. $(೩ತ + ನ)^2 - ೨(೩ತ + ನ)(೩ತ - ನ) + (೩ತ - ನ)^2.$
೨. $(೩ಯ - ೩ರ)^2 + ೨(೩ಯ - ೩ರ)(೩ರ + ೩ಯ) + (೩ರ + ೩ಯ)^2.$
೩. $(೩ಪ - ೩ಮ)^2 + ೨(೩ಪ - ೩ಮ)(೩ಮ - ೩ಪ) + (೩ಮ - ೩ಪ)^2.$
೪. $(೩ಕ + ೩ಗ)^2 - ೨(೩ಕ + ೩ಗ)(೩ಗ + ೩ಘ) + (೩ಗ + ೩ಘ)^2.$

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

೫. $(ಅಕ-ಒಗ+ಖಘ)^೨ + ೨(ಅಕ-ಒಗ+ಖಘ)$
 $(ಒಗ-ಖಘ+ಓಕ) + (ಒಗ-ಖಘ+ಓಕ)^೨.$
೬. ಪ=೨, ಬ=೧, ಮ=೩ ಇದ್ದರೆ ಲ ಪೌಬೌ+೧೨ ಪಬಮ+೧ಮೌ= ?
೭. ಅ=೧, ಕ= -೨, ಗ=೩ ಇದ್ದರೆ ೧೬ಅೌ. ಲಂಠಕಗ+೨೫ಕೌಗೌ= ?
೮. ಅ=೨, ಕ= -೩, ಗ=೪ ಇದ್ದರೆ $(ಅಅ-ಕ+೨ಗ)^೨$
 $-೨(ಅಅ-ಕ+೨ಗ)(ಅ-೨ಕ-೨ಗ)+(ಅ-೨ಕ-೨ಗ)^೨= ?$
೯. ಅ+ಕ=೧೦, ಮತ್ತು ಅಕ= -೩ ಇದ್ದರೆ ಅೌ+ಕೌ= ?
೧೦. ತ=೫ ಮತ್ತು ತಸ= -೪ ಇದ್ದರೆ ತೌ+ಸೌ= ?
೧೧. ಪ+ಮ= ೬ ಮತ್ತು ಪಮ= ೮ ಇದ್ದರೆ (ಪ-ಮ)೨= ?
೧೨. ಯ=೪ ಮತ್ತು ಯರ= -೧೬ ಇದ್ದರೆ (ಯ+ರ)೨= ?

ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ :

೧೩. ಅ+ $\frac{೧}{ಅ} = -೫$ ಇದ್ದರೆ ಅೌ + $\frac{೧}{ಅೌ} = ೨೩.$
೧೪. ಕ- $\frac{೧}{ಕ} = -೪$ ಇದ್ದರೆ ಕೌ + $\frac{೧}{ಕೌ} = ೧೮.$
೧೫. ಯ+ $\frac{೧}{ಯ} = ೮$ ಇದ್ದರೆ ಯೌ + $\frac{೧}{ಯೌ} = ೮೨ \dots ೨.$
೧೬. ಯ - $\frac{೧}{ಯ} = ೬$ ಇದ್ದರೆ ಯೌ + $\frac{೧}{ಯೌ} = ಕೌ + ೨.$
೧೭. ಬ + $\frac{೧}{ಬ} = -೭$ ಇದ್ದರೆ ಬೌ + $\frac{೧}{ಬೌ} = ?$
೧೮. ಸ - $\frac{೧}{ಸ} = ೮$ ಇದ್ದರೆ ಸೌ + $\frac{೧}{ಸೌ} = ?$
೧೯. ಪ + $\frac{೧}{ಪ} = ೪$ ಇದ್ದರೆ $(ಪ - \frac{೧}{ಪ})^೨ = ?$
೨೦. ಸ - $\frac{೧}{ಸ} = -೨$ ಇದ್ದರೆ $(ಸ + \frac{೧}{ಸ})^೨ = ?$

ದ್ವಿಪದವರ್ಗವಿಸ್ತಾರದ ಮೂರು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಮೂರನೆಯದನ್ನು ಬರೆದು ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವದು.

೧. ೩. ಈಗ ನಾವು ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವೊಳಗಿನ ಮೂರೂ ಪದಗಳ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಇರುವ ಸಂಬಂಧವು ಯಾವ ತರಹದ್ದಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವೆವು.

$$(ಪ + ಮ)^2 = ಪ^2 + ೨ಪಮ + ಮ^2 \text{ ಮತ್ತು}$$

$$(ಪ - ಮ)^2 = ಪ^2 - ೨ಪಮ + ಮ^2$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತಾರವೊಳಗಿನ ನಡುವಿನ ಪದವು ಯಾವಾಗಲೂ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಇರುತ್ತದೆ.

ನಡುವಿನ ಪದ = ೨ × ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ × ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ.

ಇದು ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುವುದು. ಎರಡು ವರ್ಗಗಳೆರಡರ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ಕೊಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ

	ಪ	ಮ	
ಪ	ಪ ^೨	ಪಮ	೫
ಮ	ಪಮ	ಮ ^೨	೪

ಆಕೃತಿ ೧

ಒಂದು ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. ಪ^೨ + ಮ^೨ ದಲ್ಲಿ ಪ^೨ ಮತ್ತು ಮ^೨ ಇವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ (ಪ ಮತ್ತು ಮಗಳ) ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು (೨ಪಮ)

ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ಅದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಮಾತು ಪರಿಶೇಷ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು. ಮೊದಲನೆಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಪ^೨ ಮತ್ತು ಮ^೨ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ೨ಪಮ ವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಪ + ಮ ದ ವರ್ಗ

ಕ	ದ	ಫ	
ಪ	ಪಮ	(ಪ-ಮ) ^೨	೫
ಮ	ಧ	ಮ ^೨	೪

ಆಕೃತಿ ೨

ವಾಗುವೆಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಅಕ್ರಮಮೇಲಿಂದ ಪೂ + ಮೂ ಬೀಜಗಳಿಂದ ೨ ಪಮ ವಸ್ತು ಕಳೆದಿರುವ ರೇಖೆ ಪ ಮ ವ ವರ್ಗವಿರುವದಿಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಕಖಗಘ ಮತ್ತು ತಗಚಜ ಈ ಚೌರಸಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಅಕ್ರಮಬೀಜಗಳಿಂದ ಕಖನದ ಮತ್ತು ಧನಚಜ ಈ ಎರಡು ಸಮಾನ ಕಾಪಿಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಅಕ್ರಮಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದರೆ ದಧತಘ ಈ ಚೌರಸವು ಉಳಿಯುವದು.

ಮೇಲಿನ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಎರಡು ಪದಗಳ ಜೇರ್ಛಿನಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಜೇರ್ಛಿನೊಳಗಿಂದ ಆ ಪದಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ೧೦೦೨ + ೧೨೧೨ ಇದರಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ೧೦೨ ಮತ್ತು ೧೧೨ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ ೨೨೦೨ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ಬರುವ ರಾಶಿಗಳು ೧೦೦೨ + ೨೨೦೨ + ೧೨೧೨ ಮತ್ತು ೧೦೦೨ - ೨೨೦೨ + ೧೨೧೨ ಇವು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಿರುವವು.

ಮೊದಲನೆಯದು ೧೦೨ + ೧೧೨ ದ ವರ್ಗವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು ೧೦೨ - ೧೧೨ ದ್ದು ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

೧.೪. ಅದರಂತೆಯೇ ನಡುವಿನ ಪದವು = ೨ × ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ × ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಇರುವದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ × ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ = ನಡುವಿನ ಪದದ ಚರ್ಛ.

∴ ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವು = ನಡುವಿನ ಪದದ ವರ್ಗ ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ.

$$\begin{aligned} & ೧೦೦೨ \dots + ೧೨೧೨ \\ & = (೧೦೨)^೨ \dots + (೧೧೨)^೨ \\ & = (೧೦೨)^೨ \pm \\ & ೨. ೧೦೨.೧೧೨ + (೧೧೨)^೨ \\ & = (೧೦೨+೧೧೨)^೨ \end{aligned}$$

∴ ಕೊನೆಯ ಪದವು = (ನಮನಿಸ ಪದದ ಅರ್ಧ + ಮೊದಲನೇ ಪದದ ಮರ್ಗಮೂಲ)².

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲಿನ ಪದಾಚಾರಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಎರಡನೇ ಪದದ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಮೊದಲಿನ ಪದದ ಮರ್ಗಮೂಲದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರದ ಮರ್ಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಮರ್ಗವಾಗುತ್ತವೆ. ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಅಕ್ಕತಗಳಿಂದ ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಇವರ ಅರ್ಧ-ಮೇಸರಿಂದ ದ್ವಿಪದಿಯ ಮರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವೊಳಗಿನ ನಮನಿಸ ಪದ ಮತ್ತು ಬುಳಿದ ಎರಡು ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಪದ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಬುಳಿದ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ನಮಗೆ ಬರುವದು. ಬುದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೧೨೨ + ೧೨೨೨ ಇದರಲ್ಲಿ ೧೨೨೨ ದ ಅರ್ಧ ೬೧೧, ಇದಕ್ಕೆ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ಮರ್ಗಮೂಲ ೨೨ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೧೨. ಇದರ ಮರ್ಗ ೧೨೨ ನನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಪೂರ್ಣ ಮರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ೧೨೨೨ ಖಂಕಕ ಇದರಲ್ಲಿ ಖಂಕಕ ದ ಅರ್ಧ ೬೦೬, ಇದಕ್ಕೆ ಮೊದಲನೇ ಪದದ ಮರ್ಗಮೂಲ ೨೨೨ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೨೭, ಇದರ ಮರ್ಗ ೨೨೨೨ ನನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ಮರ್ಗವಾಗುವದು. ಮೊದಲನೆಯದು ೨೨೨ + ೧೨೨ ಇದರ ಮರ್ಗವನ್ನು ಎರಡನೆಯದು ೨೨೨ ೨೨೨ ಇದರ ಮರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned} & ೧೨೨ + ೧೨೨೨ + \dots \\ & = (೨೨)² + ೨.೨೨.೧೨ + .. \\ & = (೨೨)² + ೨.೨೨.೧೨ + (೧೨)² \\ & = (೨೨ + ೧೨)² \\ & ೧೨೨೨ + ೨೨೨೨೨ + \dots \\ & = (೨೨)² ೨.೨೨.೨೨೨ + \dots \\ & = (೨೨)² ೨. ೨೨. ೨೨೨ + (೨೨)² \\ & = (೨೨.೨೨)² \end{aligned}$$

ದ್ವಿಪದಿಯ ಮರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಮೊದಲನೆಯವನ್ನು ಬುಳಿದ ತೆಗೆಯಲು ಮೇಲೆವರೂ ಕ್ರತಿಯು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಬರುವದು. ಬುದಾಹರಣೆಗಾಗಿ + ೧೨೨೨ + ೧೨೨

ಇದರಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಅರ್ಧ ಲಿಖಿತ, ಇದಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ೭ಕ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೬ಕ, ಇದರ ವರ್ಗ ೩೬ಕ೨ ಇದು ಮೊದಲನೇ ಪದವಿದ್ದು ವಿಸ್ತಾರವು ೩೬ಕ೨+೮೪ಕ+೪೯ಕ೨ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಮತ್ತು....

-೧೪೪ ಕಕ+೮೪ಕ೨ ಇದರಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಅರ್ಧ ೭೨ಕ, ಇದಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ೯ಕ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೮೨, ಇದರ ವರ್ಗ ೭೨೨ ಇದು ಮೊದಲನೇಯ ಪದವು ಇದ್ದು ವಿಸ್ತಾರವು ೭೨೨-೧೪೪ಕಕ+೮೪ಕ೨ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಇನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಇನ್ನು ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹವೊಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರಬೇಕು.

ಉ. ೧. ೩೬ ಯ೨—೬೦ಯರ ಇದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು ?

೩೬ ಯ೨ = (೬ಯ)೨, ಮತ್ತು ೬೦ಯರ = ೨.೬ಯ.೫ರ.

∴ (೫ರ)೨, ೬೦.೨೫ರ೨ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು.

೩೬ಯ೨—೬೦ಯರ+೨೫ರ೨ ಇದು ೬ಯ—೫ರ ವ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೨. ೪ಯ೨+೪೯ವ೨ ಇದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು ?

೪ಯ೨=(೨ಯ)೨, ಮತ್ತು ೪೯ವ೨ = (೭ವ)೨

∴ ೨.೨ಯ.೭ವ, ೨೦.೨೮ಯವ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು ?

೪ಯ೨+೨೮ಯವ+೪೯ವ೨ ಇದು ೨ಯ+೭ವ ವ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

... ೮೪ಕಕ+೪೯ಕ೨

= ... + ೨.೬೨.೭ಕ +

(೭ಕ)೨

=(೬೨)೨ + ೨.೬೨.೭ಕ +

(೭ಕ)೨

=(೬೨+೭ಕ)೨

... — ೧೪೪ಕಕ+೮೪ಕ೨

=...-೨.೮೨.೯ಕ+(೯ಕ)೨

=(೮೨)೨-೨.೮೨.೯ಕ +

(೯ಕ)೨

=(೮೨-೯ಕ)೨

ಉ. ೩. ಗೂಗಿನ^೨ + ಟಳುಮ^೩ ಇದರೊಳಗಿಂದ ಏನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು? ಗೂಗಿನ^೨ = (ಗಿಗಿನ^೨)^೨ ಮತ್ತು ಟಳುಮ^೩ = (ಲಮ)^೩.
 ∴ ಗಿಗಿನ^೨ - ಲಮ, ಅಂದಿಹನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವದು.
 ಗೂಗಿನ^೨ - ಗಿಗಿನ^೨ + ಟಳುಮ^೩ ಇದು ಗಿಗಿನ - ಲಮ ದ ವರ್ಗವಿರುವದು.

ಉ. ೪. ಳಾಯ^೨ + ಗುಯ^೩ ಇದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಬು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವದು.

ಳಾಯ^೨ = (ಯ)^೨, ಮತ್ತು ಗುಯ^೩ = ೨.೩ಯ.೪.

∴ (೪)^೨, ಅಂದಿಹನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಬು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವದು.

ಳಾಯ^೨ + ಗುಯ^೩ + ಗುಯ^೩ ಇದು ಯ + ೪ ರ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೫. ಅಯ^೨ ಒಂಕಯ^೩ + ಅಕ^೩ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟುಕ^೩ ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಿರುವದು?

ಅಯ^೨ = (ಯ)^೨, ಮತ್ತು ಒಂಕಯ^೩ = ೩.೬ಕ. ಯ.

∴ ಅಯ^೨ - ಒಂಕಯ^೩ ದ ಜೊತೆಗೆ (೬ಕ)^೩, ಅಂದಿಹನು ಇದ್ದರೆ ಅದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು. ಅದುವರಿಂದ ಮೂಲರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ೬ಕ^೩ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವದು.

ಅಯ^೨ - ಒಂಕಯ^೩ + ೬ಕ^೩ ಇದು ಯ - ೬ಕ ದ ವರ್ಗವಿರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨.

[ಇದರಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಜಡಿಸಲು ಬರುವವು.]

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಗೆ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗವಾಗುವದೋ ಇದನ್ನು ಹೇಳಿ ಅದು ಯಾವ ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗವಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೧. ೧೦೦ರ^೨ + ೬೦೦.

೨. ೧೪೪ರ^೨ - ೧೬೦೦.

೩. ೧೬೪ರ^೨ - ೧೦೦೦೦.

೪. ೧೦೦ರ^೨ - ೧೪೪೦.

೫. ೪೪ರ^೨ + ೨೦೦೦ + ೨೦.

೬. ೧೦೦ರ^೨ - ೧೦೦೦ ೫.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವುದು. ಅದರಲ್ಲಿ ಕೂಡಲೇ ಇದ್ದ ಪದವನ್ನು ಹೇಳಿ ಅದು ಯಾವುದರ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೭ + ೩೦ಪಮ + ೨೫ಮೌ.

೮. + ೬೦ಪಮ + ೮೦ಮೌ.

೯. ೪೯ಯೌ + + ೧೦೦ರೌ.

೧೦. ೬೪ಯೌ + + ೧೪೪.

೧೧. ೮೧ಯೌ + + ೧೪೪.

೧೨. ೪೯ — + ೬೪ಕೌ.

೧೩. ೪೯ಯೌ — + ೯೦೦.

೧೪. ೪ ಅೌಕೌ — + ೯೪೪.

೧೫. ೧೬ಅೌಕೌ — + ೨೫೦ೌ ಘೌ.

೧೬. ೮೧ — + ೪೯ಅೌಕೌ ಗೌ.

೧೭ ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ೨೫ರೌ + ೧೦ರ + ೪ ಮತ್ತು ೧೬ಯೌ—೨೬ಯ+೯ ಈ ರಾಶಿಗಳು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವವು, ಆ ನಂತರ ಅವು ಯಾವುದರ ವರ್ಗವಾಗುವವು ?

೧೮ ನಡುವಿನ ಪದವೊಳಗಿಂದ ಯಾವುದನ್ನು ಕಳೆಪರೆ ೯ಯೌ + ೨೧ಯೌರೌ+೪ ರೌ ಈ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣವಾಗುವುದು, ಆ ನಂತರ ಅದು ಯಾವುದರ ವರ್ಗವಾಗುವುದು ?

೨.

(ಪ + ಬ + ಮ)೨ ≡ ಪ೨ + ಬ೨ + ಮ೨ + ೨ಪಬ + ೨ಬಮ + ೨ ಮ ಪ

೧೦. ೫. ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಭಾ.ತ.ಪು.೩೩, ೩೪) ಪ + ಬ + ಮ ದಂತಹ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಪದಿಯ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಒಪ್ಪಿಸಿ ಮಗ್ಗಿ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಪ + ಬ + ಮ ವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಪ + ಬ + ಮ ಎಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ

ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವ ದ್ವಿಪದವರ್ಗವಿಸ್ತಾರಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಯಾವದೇ ತ್ರಿಪದಿಯ ವರ್ಗವು ಅದರಲ್ಲಿಯೂ ಮೂರೂ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರಿಜು ಅಧೀಕ ಅ ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾದ ಅಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಪ+ಬ ದ ನಿರ್ವೇಶವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ,

$$(ಪ+ಬ+ಮ)^೨ = (ಅ+ಮ)^೨$$

$$= ಅ^೨ + ೨ಅಮ + ಮ^೨$$

$$= (ಪ+ಬ)^೨ + ೨ಮ(ಪ+ಬ) + ಮ^೨$$

[ಅ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮೂಲ ಪ+ಬ ಬರೆದು]

$$= ಪ^೨ + ೨ಪಬ + ಬ^೨ + ೨ಪಮ + ೨ಬಮ + ಮ^೨$$

$$= ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಪಬ + ೨ಬಮ + ೨ಮಪ$$

ಬದಿಯಲ್ಲಿಯು ಆಕೃತಿ

ಮೇಲಿಂದಲೂ ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಈ ವಿಸ್ತಾರ-ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಹಿಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದೆ. ಇಂದು ನಾವು ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

	ಪ	ಬ	ಮ	
ಮ		ಪ ಬ	ಪ ಮ	೩
ಪ ಬ		ಬ	ಬ ಮ	
ಪ ಮ		ಬ ಮ	ಮ	೩

ಆಕೃತಿ ೩.

ಉ. ೧. $(ಪ-ಬ-ಮ)^೨ = ಪ^೨ + (-ಬ)^೨ + (-ಮ)^೨ + ೨ಪ(-ಬ) + ೨ಪ(-ಮ) + ೨(-ಬ)(-ಮ)$
 $= ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ೨ಪಬ + ೨ಪಮ - ೨ಬಮ.$

ಉ. ೨. $(೨ಕ-೨ಗ+೩ಘ)^೨ = (೨ಕ)^೨ + (-೨ಗ)^೨ + (೩ಘ)^೨ + ೨.೨ಕ(-೨ಗ) + ೨.೨ಕ. ೩ಘ +$

$$೨(-೨ಗ).೬ಘ$$

$$= ೨೫ಕೃ + ೪ಗೃ + ೬೬ಘೃ - ೨೦ಕಗ + ೬೦ಕಘ - ೨೪ಗಘ.$$

ಅ. ೩. $(೨ಪ - ೨ಬ - ೩ಮ)೨$

$$= (೨ಪ)೨ + (-೨ಬ)೨ + (-೩ಮ)೨ + ೨.೨ಪ$$

$$(-೨ಬ) + ೨.೨ಪ(-೩ಮ) + ೨(-೨ಬ)(-೩ಮ)$$

$$= ೬೪ಪ೨ + ೪ಬ೨ + ೯ಮ೨ - ೨೪ಪಬ - ೧೨ಪಮ + ೩೬ಬಮ$$

ಅ. ೪. $(೨ಯ೩ + ೨೨ - ೫ಲ)೨ = (೨ಯ೩)೨ + (೨೨)೨ +$

$$(-೫ಲ)೨ + ೨.೨ಯ೩. ೨೨ + ೨.೨ಯ೩ (-೫ಲ) +$$

$$೨೨(-೫ಲ)$$

$$= ೪ಯ೩ + ೪೪ + ೨೫ಲ೨ + ೪ಯ೩೨೨ -$$

$$೨೦ಯ೩ಲ - ೧೦೨ಲ.$$

ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಯಾವದೇ ತ್ರಿಪದಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು
ಫಡುವಿನ ಹಂತವನ್ನು ಜಿಟ್ಟಿ ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆ ಲೇ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಅ. ೫. $ಯ = ೩, ರ = ೨, ಲ = ೫$ ಇದ್ದರೆ $೯ಯ೨ + ೪ರ೨ + ೪ಲ೨$

$$- ೪೨ಯರ - ೨೪ರಲ + ೧೨ಲಯ = ?$$

$$೯ಯ೨ + ೪ರ೨ + ೪ಲ೨ - ೪೨ಯರ - ೨೪ರಲ + ೧೨ಲಯ$$

$$= (೯ಯ)೨ + (-೨ರ)೨ + (೨ಲ)೨ + ೨.೨ಯ(-೨ರ)$$

$$+ ೨.೨ಲ(-೨ರ) + ೨.೨ಲ.೨ಯ$$

$$= (೯ಯ - ೨ರ + ೨ಲ)೨$$

$$= (೯ - ೧೪ + ೧೦)೨$$

$$= (೫)೨$$

$$= ೨೫.$$

ಉ. ೬. $(ಪ+ಬ)^೪$ ದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ
 $(ಪ+ಬ)^೪ = \{(ಪ+ಬ)^೩\}^೨$
 $= (ಪ^೩+೩ಪಬ+ಬ^೩)^೨$
 $= (ಪ^೩)^೨ + (೩ಪಬ)^೨ + (ಬ^೩)^೨ + ೨ಪ^೩ \cdot ೩ಪಬ +$
 $೨ಪ^೩ಬ^೩ + ೨೩ಪಬ \cdot ಬ^೩$
 $= ಪ^೬+೪ಪ^೪ಬ+೬ಪ^೩ಬ^೨+೪ಪ^೨ಬ^೩+೩ಪಬ^೪+ಬ^೬$
 $= ಪ^೬+೪ಪ^೪ಬ+೬ಪ^೩ಬ^೨+೪ಪ^೨ಬ^೩+ಬ^೬.$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೩.

(ಮೊದಲಿನ ಬಳಕೆಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವವು.)
 ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

- | | |
|---------------|----------------|
| ೧. ೬ತ-೬-೩. | ೨. ಯ-೪ರ+೩ಲ. |
| ೩. ಲಯ+೩ರ+೨ಲ. | ೪. ಖಕ-೨ಗ+೫ಫ. |
| ೫. ಖಪ-೨ಬ-೫. | ೬. ೨ಯ-೩ರ+೩ಲ. |
| ೭. ಖಕ+೩ಗ-೬ಫ. | ೮. ೩ತ-೧೦೬-೩ನ. |
| ೯. ಖಕ-೩ಗ-೫ಫ. | ೧೦. ಕ-೨ಕಗ+೩ಗ. |
| ೧೧. ಯ-೨ಯ-೫ಯ. | ೧೨. ೩ಯ-೬ಯರ+೩ರ. |
| ೧೩. ಖತ-೬ತ-೨. | ೧೪. ೩ಪ-೫-೩ಪ. |
| ೧೫. ೨ಕ-೩ಗ-೫ಫ. | ೧೬. ೫ರ-೩ಲ+೨ಯ. |
| ೧೭. ೩ಪ+೩ನ-೫ತ. | ೧೮. ೪ಕ-೧೦೬-೩ನ. |
| | ೧೯. ೫ದ-೩ನ-೩ತ. |

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ

೧೦. ೯ಪ+೪ಬ+೩ಮ-೧೨ಪಬ-೩ಬಮ+೨ಮಪ.
 ೧೧. ೪ಕ+೧೬ಕ+೪ಕ-೨೪ಕ+೯.
 ೨೦. ೧೬ಯ-೨೪ಯರ+೪೯ಯರ ೩೦ಯರ+೨೫ರ.

ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

೨೧. (ಅಯು + ೫೦)೨ = — ೧೨ಯುರ
 ೨೨. (.... — ೭೦....)೨ = — ೪೨ಯುರ — ೬೦ಯು.
 ೨೩. (೫೫)೨ = + ೧೨ಬಹು ೨೦ಮುಪ.
 ೨೪. (.... — ೪೫....)೨ = — ೨೪ಕಗ + ೫೪ಕ
 ೨೫. ಯ=೫, ರ=೩, ಲ= ೧ ಇದ್ದರೆ ಯು + ೪ರ + ೨ — ೪ಯುರ
 — ೪ರಲ + ೨ಲಯ = ?

೨೬. ಪ=೩, ಬ=೨, ಮ=೧ ಇದ್ದರೆ ೪ಪ + ೨ಬ + ೧ಮ
 — ೬ಪಬ + ೨ಬಮ — ೧೬ಮಪ = ?

೨೭. ತ = ೩ ಇದ್ದರೆ ತ೨ — ೪ತ + ೬ — $\frac{೪}{೨}$ + $\frac{೧}{೨}$ = ?

ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೨೮. (ತ-೩. ದ)೪, ೨೯. (೫ನ + ೨ಮ)೪.

೩೦. (ಯ -- $\frac{೧}{೨}$ ಯ)೪.

೧.೬. ∴ (ಪ + ಬ + ಮ)೨

≡ ಪ೨ + ಬ೨ + ಮ೨ + ೨ಪಬ + ೨ಬಮ + ೨ಮಪ

≡ ಪ೨ + ಬ೨ + ಮ೨ + ೨ (ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ)

∴ ಪ೨ + ಬ೨ + ಮ೨ ≡ (ಪ + ಬ + ಮ)೨

— ೨(ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ) ಮತ್ತೆ ೨(ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ)

≡ (ಪ + ಬ + ಮ)೨ — (ಪ೨ + ಬ೨ + ಮ೨)೨ ಕಂಡರಿಯೇ

ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ

≡ $\frac{೧}{೨}$ [(ಪ + ಬ + ಮ)೨ — (ಪ೨ + ಬ೨ + ಮ೨)]

ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯಸಮಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದೆ ಕೆಳಕಂಡ
 ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಜಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಯ + ರ + ಲ = ೫, ಮತ್ತು ಯರ + ರಲ + ಲಯ = ೮

ಇದ್ದರೆ ಯ + ರ + ಲ = ?

ಯ + ರ + ಲ = (ಯ + ರ + ಲ)

— ೨ (ಯರ + ರಲ + ಲಯ)

= (೫) — ೨

= ೫ — ೨

= ೩.

ಉ. ೨. ಕ + ಗ + ಘ = ೬ ಮತ್ತು ಕು + ಗು + ಘು = ೧೦

ಇದ್ದರೆ ಕಗ + ಗಘ + ಘಕ = ?

ಕಗ + ಗಘ + ಘಕ

= ೨ (ಕ + ಗ + ಘ) — (ಕು + ಗು + ಘು)

= ೨ (೬ — ೧೦)

= ೨ (— ೪)

= — ೮.

ಉ. ೩. (ಯ — ರ) + (ರ — ವ) + (ವ — ಯ) +

೨(ಯ — ರ)(ರ — ವ) + ೨(ರ — ವ)(ವ — ಯ)

+ ೨(ವ — ಯ)(ಯ — ರ) ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲಿ.

ಯ — ರ, ರ — ವ, ಮತ್ತು ವ — ಯ ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ, ಬ ಮತ್ತು ಮ ಗಳಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು

= ಪ + ಬ + ಮ + ೨ ಪಬ + ೨ ಬಮ + ೨ ಮಪ

= (ಪ + ಬ + ಮ)

= (ಯ — ರ + ರ — ವ + ವ — ಯ)

= ೦.

ಈ ಉಪಪದ್ಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ, ಬ, ಮ ಈ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೇ ಸಹ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಈ ಹಂತವನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉ. ೪. ಯ = ಕ + ಗ — ಚ, ರ = ಗ + ಚ — ಕ, ಸ = ಚ + ಕ —
ಇದ್ದರೆ ಯ^೨ + ರ^೨ + ಸ^೨ + ೨ಯರ + ೨ರಸ + ೨ಸಯ
= ಚ^೨ + ಕ^೨ + ಗ^೨ + ೨ಚಕ + ೨ಕಗ + ೨ಗಚ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.
ಯ^೨ + ರ^೨ + ಸ^೨ + ೨ಯರ + ೨ರಸ + ೨ಸಯ

$$= (ಯ + ರ + ಸ)^೨$$

$$= (ಕ + ಗ — ಚ + ಗ + ಚ — ಕ + ಚ + ಕ — ಗ)^೨$$

$$= (ಚ + ಕ + ಗ)^೨$$

$$= ಚ^೨ + ಕ^೨ + ಗ^೨ + ೨ಚಕ + ೨ಕಗ + ೨ಗಚ.$$

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೪.

೧. ಕ + ಗ + ಘ = ೮, ಮತ್ತು ಕ^೨ + ಗ^೨ + ಘ^೨ = ೩೦
ಇದ್ದರೆ ಕಗ + ಗಘ + ಘಕ = ?
೨. ತ + ದ + ನ = ೦, ತದ + ದನ + ನತ = — ೧೯
ಇದ್ದರೆ ತ^೨ + ದ^೨ + ನ^೨ = ?
೩. ಪ — ಬ + ಮ = ೬ ಮತ್ತು ಪಬ + ಬಮ — ಮಪ + ೧೧ = ೦
ಇದ್ದರೆ ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ = ?
೪. ಅ + ಕ = ಗ + ೧ ಮತ್ತು ಗ(ಅ + ಕ) = ಚಕ + ೨೨
ಇದ್ದರೆ ಅ^೨ + ಕ^೨ + ಗ^೨ = ?
೫. ೨(ಯ + ರ + ಲ + ೧) = ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨ = ೧೪
ಇದ್ದರೆ ಯರ + ರಲ + ಲಯ = ?
೬. ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨ = — ೪ ಮತ್ತು ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨ = ೧೪
ಇದ್ದರೆ ಯರ + ರಲ + ಲಯ = ?
೭. ಪ — ಬ — ಮ = ೬, ಮತ್ತು ಪಬ + ಪಮ — ಬಮ = ೩ ಇದ್ದರೆ
ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ = ?

ಮುಂದಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೮. (ಪ — ೨ಬ)^೨ + (೨ಬ — ೩ಮ)^೨ + (೩ಮ — ೪ಪ)^೨ +

೨(ಪ—೨ಬ)(೨ಬ—೨ಮ) + ೨(೨ಬ—೨ಮ) (೨ಮ—೨ಪ) +
೨(೨ಮ—೨ಪ) (ಪ—೨ಬ).

೯. ಕ^೨ (ಗ—ಘ)^೨ + ಗ^೨ (ಘ—ಕ)^೨ + ಘ^೨ (ಕ—ಗ)^೨ +
೨ಕಗ (ಗ—ಘ) (ಘ—ಕ) + ೨ಗಘ (ಘ—ಕ) (ಕ—ಗ) +
೨ಘಕ (ಕ—ಗ) (ಗ—ಘ).

೧-೭. ಹಿಂಸೆ (ಭಾ. ೨. ಪು. ೭೨) ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇನೆಂದರೆ
ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೋ ಪದಗಳಿದ್ದರೂ ಆ ರಾಶಿಯ ವರ್ಗವು ಆ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ
ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅರ್ಥಿಕ ಎರಡೆರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ
ಬೇರೀಜು ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ+ಬ+
ಭ+ಮ ವ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯುವದು ಇದ್ದರೆ ಅವನ್ನು ಪ^೨+ಬ^೨+ಭ^೨+
ಮ^೨+೨ ಪಬ+೨ ಪಭ+೨ ಪಮ+೨ ಬಭ+೨ ಬಮ+೨ ಭಮ ಎಂದು
ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ
ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಇಲ್ಲವೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದು.

(ಪ+ಬ+ಭ+ಮ)^೨

≡ ಪ^೨+೨ಪ (ಬ+ಭ+ಮ) + (ಬ+ಭ+ಮ)^೨

≡ ಪ^೨+೨ಪಬ+೨ಪಭ+೨ಪಮ+ಬ^೨+ಭ^೨+ಮ^೨+
೨ ಬಭ+೨ ಬಮ+೨ ಭಮ

≡ ಪ^೨+ಬ^೨+ಭ^೨+ಮ^೨+೨ಪಬ+೨ಪಭ+೨ಪಮ+
೨ಬಭ+೨ಬಮ+೨ಭಮ.

ಇದರಂತೆಯೇ ಯಾವನೇ ಬಹುವ್ರಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ
ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಮುಂದಿನ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು
ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುವದು.

(ಪ+ಬ+ಮ)^೨ ≡ ಪ^೨+ಬ^೨+ಮ^೨+೨ಪ (ಬ+ಮ)+೨ಬಮ;

(ಪ+ಬ+ಭ+ಮ)^೨

≡ ಪ^೨+ಬ^೨+ಭ^೨+ಮ^೨+೨ಪ (ಬ+ಭ+ಮ) +
೨ಬ (ಭ+ಮ)+೨ಭಮ;

(ಪ+ಫ+ಬ+ಭ+ಮ)^೨≡ಪ^೨+ಫ^೨+ಬ^೨+ಭ^೨+ಮ^೨+
 ೨ಪ(ಫ+ಬ+ಭ+ಮ)+೨ಫ(ಬ+ಭ+ಮ)+
 ೨ಬ(ಭ+ಮ)+೨ಭಮ.

ಉ. ೧. ೨ಯ—೩ರ—೪+೫ಸ ದ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.
 (೨ಯ—೩ರ—೪+೫ಸ)^೨

=(೨ಯ)^೨+(—೩ರ)^೨+(—೪)^೨+(೫ಸ)^೨+೨.೨ಯ(—೩ರ)
 +೨.೨ಯ(—೪)+೨.೨ಯ೫ಸ+೨(—೩ರ)(—೪)
 +೨(—೩ರ).೫ಸ+೨(—೪).೫ಸ

= ೪ಯ^೨+೯ರ^೨+೧೬+೨೫ಸ—೧೨ಯರ—೮ಯ೪+
 ೨೦ಯಸ+೬ರ೪+೩೦ರಸ+೧೦೪ಸ.

* ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಾಕಷ್ಟು ರೂಢಿಯು
 ಆದಮೇಲೆ ಈ ನಡುವಿನ ಹಂತದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲ.

ಉ. ೨. (ಪ+ಮ)^೨ ದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(ಪ+ಮ)^೨= { (ಪ+ಮ)^೨ }^೨
 =(ಪ^೨+೨ಪಮ+ಮ^೨)^೨
 =ಪ^೪+೪ಪ^೩ಮ+೬ಪ^೨ಮ^೨+೪ಪಮ^೩+ಮ^೪+೬ಪ^೩ಮ+
 ೬ಪ^೨ಮ^೨+೨ಪಮ^೩+೧೬ಪ^೨ಮ^೨+೬ಪಮ^೩+೬ಪಮ^೩+
 =ಪ^೪+೬ಪ^೩ಮ+೧೬ಪ^೨ಮ^೨+೨೦ಪಮ^೩+
 ೧೬ಪಮ^೩+೬ಪಮ^೩+ಮ^೪.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೫.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ :

೧. ತ—ದ+ಧ+ನ. ೨. ೩ಪ—೪ಬ—ಭ—ಮ.
 ೩. ೨ಪ—೪ಮ+೫. ೪. ೫ಯ—ರ+೩ಲ—೧.

ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:-

೫. (ಪ—ಮ)^೨. ೬. (೨ಯ+ರ)^೨. ೭. (ತ—೩ನ)^೨.
 ೮. (೩ಯ—೨ಲ)^೨. ೯. (೨ರ—೩ಸ)^೨.

೩.

(ಪ+ಮ) (ಪ-ಮ)≡ಪ-ಮ

೧.೮. ನಾವು ಹಿಂದೆ (ಭಾಗ ೧, ಪು. ೧೯೯) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರಿನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದರೇಯೇ (ಪ+ಮ) (ಪ-ಮ)≡ಪ-ಮ ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದೇ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಆಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಭಾ. ೨, ಪು. ೮೦-೮೪ ರಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದೇ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಇಂದು ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವೆ.

ಉ. ೧. ತ+ದ+೨ನ ಮತ್ತು ೨ನ-ತ-ದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನ ಚಿಹ್ನೆವಿರುವ ಎರಡು ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಗುಂಪಿನ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು ಪ ಈ ಆದೇಶದಿಂದ ಮಾಡಿ, ಇಷ್ಟು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{aligned}
 & (ತ+ದ+೨ನ)(೨ನ-ತ-ದ) \\
 & = \{೨ನ+(ತ+ದ)\} \{೨ನ-(ತ+ದ)\} \\
 & = (೨ನ+ಪ)(೨ನ-ಪ) * \\
 & = (೨ನ)²-(ಪ)² * \\
 & = ೪ನ²-(ತ+ದ)² [ಪ ದ ಬದಲಾಗಿ ತ+ದ ಬರೆದು] \\
 & = ೪ನ²-(ತ²+೨ತದ+ದ²) \\
 & = ೪ನ²-ತ²-೨ತದ-ದ².
 \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ೫ಯ-೭ರ+೩ಸ ಮತ್ತು ೫ಯ+೭ರ-೩ಸ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ, ೫ಯ, ದ ಹಿಂದಿನ ಚಿಹ್ನೆವು ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಇದ್ದು ೭ರ ಮತ್ತು ೩ಸ ಇವುಗಳ ಹಿಂದಿನ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಭಿನ್ನ ಆಂ. ವೇದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ - ಮತ್ತು + ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಇದರ ವಿರುದ್ಧ ಆಂ. + ಮತ್ತು - ಇದ್ದುದರಿಂದ,

೭ರ-೩ಸ ಇದೊಂದು ಗುಂಪು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಅದರ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು ಮುಂದೆ ಮಾಡಿ, ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.

$$\begin{aligned}
 & (೫ಯ-೭ರ+೩ಸ)(೫ಯ+೭ರ-೩ಸ) \\
 & = \{೫ಯ-(೭ರ-೩ಸ)\} \{೫ಯ+(೭ರ-೩ಸ)\} \\
 & = (೫ಯ-ಮ)(೫ಯ+ಮ) * \\
 & = (೫ಯ)^೨-ಮ^೨ * \\
 & = ೨೫ಯ^೨-(೭ರ-೩ಸ)^೨ [\because ಮ = ೭ರ-೩ಸ \\
 & = ೨೫ಯ^೨-(೪೯ರ^೨-೪೨ರಸ+೯ಸ^೨) \\
 & = ೨೫ಯ^೨-೪೯ರ^೨+೪೨ರಸ-೯ಸ^೨.
 \end{aligned}$$

ಉ.೩ ೨ಯ-೪ರ-೩ಲ+೫ಸ ಮತ್ತು ೨ಯ+೪ರ-೩ಲ-೫ಸ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಅವೇ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿರುವ ೨ಯ ಮತ್ತು ೩ಲ ಈ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಚಿಹ್ನೆಗಳಿರುವ ೪ರ ಮತ್ತು ೫ಸ ಈ ಪದಗಳ ಎರಡನೇ ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನ ಬದಲಾಗಿ ೨ಯ-೩ಲ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಎಂದೂ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಬದಲಾಗಿ ೨ಯ-೪ರ-೫ಸ, ಬದಲಾಗಿ ಮ ಎಂದು ಆದೇಶಗಳನ್ನು ಯೋಜಿಸಿದರೆ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.

$$\begin{aligned}
 & \text{ಗುಣಾಕಾರವು} = \\
 & \{(೨ಯ-೩ಲ)-(೪ರ-೫ಸ)\} \{(೨ಯ-೩ಲ)+(೪ರ-೫ಸ)\} \\
 & = (ಪ-ಮ)(ಪ+ಮ) * \\
 & = ಪ^೨-ಮ^೨ * \\
 & = (೨ಯ-೩ಲ)^೨-(೪ರ-೫ಸ)^೨ \\
 & = (೪ಯ^೨-೧೨ಯಲ+೯ಲ^೨)-(೧೬ರ^೨-೪೦ರಸ+೨೫ಸ^೨) \\
 & = ೪ಯ^೨-೧೨ಯಲ+೯ಲ^೨-೧೬ರ^೨+೪೦ರಸ-೨೫ಸ^೨.
 \end{aligned}$$

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಬಹುದು.

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ}) (\text{ಪ} + \text{ಬ} - \text{ಮ}) (\text{ಪ} - \text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 & (-\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ}). \\
 & (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ}) (\text{ಪ} + \text{ಬ} - \text{ಮ}) (\text{ಪ} - \text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 & (-\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 & \equiv \{(\text{ಪ} + \text{ಬ}) + \text{ಮ}\} \{(\text{ಪ} + \text{ಬ}) - \text{ಮ}\} \{\text{ಮ} + (\text{ಪ} - \text{ಬ})\} \\
 & \quad \{\text{ಮ} - (\text{ಪ} - \text{ಬ})\} \\
 & \equiv \{(\text{ಪ} + \text{ಬ}) - \text{ಮ}\} \{\text{ಮ} - (\text{ಪ} - \text{ಬ})\} \\
 & \equiv (\text{ಪ} + \text{ಅಪಮ} + \text{ಬ} - \text{ಮ}) (\text{ಮ} - \text{ಪ} + \text{ಅಪಮ} - \text{ಬ}) \\
 & \equiv \{\text{ಅಪಮ} + (\text{ಪ} + \text{ಬ} - \text{ಮ})\} \{\text{ಅಪಮ} - (\text{ಪ} + \text{ಬ} - \text{ಮ})\} \\
 & \equiv (\text{ಅಪಮ}) - (\text{ಪ} + \text{ಬ} - \text{ಮ}) \\
 & \equiv \text{ಅಪಮ} - (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ} + \text{ಅಪಮ} - \text{ಮ} - \text{ಮ} - \text{ಅಪಮ}) \\
 & \equiv \text{ಅಪಮ} + \text{ಅಪಮ} + \text{ಅಪಮ} - \text{ಪ} - \text{ಬ} - \text{ಮ}.
 \end{aligned}$$

ಈ ನಿತ್ಯಸಮವ ಉಪಯೋಗವು ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೋ ಸಲ ಅಗುತ್ತದೆ. ಅದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಅದರ ವಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡತಕ್ಕದ್ದು.

ಉ. ೫. ೬೦೨ ಕ್ಕೆ ೫೦೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & ೬೦೨ \times ೫೦೨ \\
 & = (೬೦೦ - ೧೨) (೬೦೦ - ೧೨) \\
 & = (೬೦೦)^2 - (೧೨)^2 \\
 & = ೩,೬೦,೦೦೦ - ೧೪೪ \\
 & = ೩,೫೯,೮೫೬.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೬. ಪ + ಅಪಮ + ಅಮ ಪ - ಅಪಮ + ಅಮ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & (\text{ಪ} + \text{ಅಪಮ} + \text{ಅಮ}) (\text{ಪ} - \text{ಅಪಮ} + \text{ಅಮ}) \\
 & = \{(\text{ಪ} + \text{ಅಮ}) + \text{ಅಪಮ}\} \{(\text{ಪ} + \text{ಅಮ}) - \text{ಅಪಮ}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\text{ಪ} + \text{ಅಮ}) - (\text{ಅಪಮ}) \\
 &= \text{ಪ} + \text{ಅಪಮ} + \text{ಗುಮ} - \text{ಅಪಮ} \\
 &= \text{ಪ} + \text{ಅಪಮ} + \text{ಗುಮ}.
 \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೬.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೧. ಅಯ + ರ - ಅಬ, ಅಯ - ರ + ಅಬ.
೨. ಅಪ - ಒಬ - ಅಮ, ಒಬ - ಅಮ - ಅಪ.
೩. ಅಕ + ಅಗ - ಅಘ, ಅಗ - ಅಘ - ಅಕ.
೪. ಅಕ - ಅಗ + ಒ, ಅಕ + ಅಗ - ಒ.
೫. ಅ + ಗ + $\frac{೧}{೬}$, ಅ - ಗ + $\frac{೧}{೬}$.
೬. ಅಲಿ - ಒಲಸ + ಅಸ, ಅಲಿ + ಒಲಸ + ಅಸ.
೭. ಅಪ + ಅಬ - ಅಭ - ಅಮ, ಅಪ - ಅಬ + ಅಭ - ಅಮ.
೮. ಅತ + ಅದ - ಅಧ + ಅನ, ಅತ - ಅದ - ಅಧ + ಅನ.
೯. ಅ + ಅ + ಗ, ಅ - ಅ + ಗ, ಅ - ಅ + ಗ.
೧೦. ಗ + ಅಪ + ಅಪ, ಗ - ಅಪ + ಅಪ, ಗ - ಅಪ + ಗುಪ.
೧೧. ಗುಯ + ರ, ಅಯ + ಅಯರ + ಅರ, ಅಯ - ಅಯರ + ರ, ಅಯ + ರ, ಅಯ - ರ.

ಬಿಡಿಸಿರಿ:

೧೨. ಅ × ಗು. ೧೩. ಅ × ಅ. ೧೪. ಅ × ಅ × ಗು. ೧೫. ಅ × ಅ × ಗು.

೪.

(ಪ ± ಮ) ≡ ಪ ± ಮ ± ಅಪಮ (ಪ ± ಮ)

೧೬. ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ (ಭಾ. ೨. ಪು. ೬೪, ೬೬) ಯಾವದೇ ದ್ವಿಸದದ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ವಿಶಿಷ್ಟ ತರಹದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬೇಗನೆ ಬಿಡಿಸುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಹೇಗಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನಾದರೂ ನಾವು ಅದರ ಮುಂದಿನ

ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ (ಪು. ೮೫-೮೯) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಈಗ ಅವೇ ಸಂಗತಿಯು ತಿರುಗಿ ಉಜ್ಜನಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಆ ವಿಷಯದ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಮುಂದೆ ಮಾಡುವಾ.

ನಮಗೆ ಪ+ಬ+ಮು ದಂತಹ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ತ್ರಿಸದಿಯ ಭಾಷಣ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಮಗೆ ಅದನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಪ+ಬ ಇದರ ಬದಲಾಗಿ ಆ ಈ ಆದೇಶವನ್ನು ಇಟ್ಟರೆ,

$$\begin{aligned}
 & (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮು})^3 = (\text{ಅ} + \text{ಮು})^3 \\
 & = \text{ಅ}^3 + \text{ಮು}^3 + 3\text{ಅ}^2\text{ಮು} + 3\text{ಅಮು}^2 \\
 & = (\text{ಪ} + \text{ಬ})^3 + \text{ಮು}^3 + 3(\text{ಪ} + \text{ಬ})^2\text{ಮು} + 3(\text{ಪ} + \text{ಬ})\text{ಮು}^2 \quad \because \text{ಅ} = \text{ಪ} + \text{ಬ} \\
 & = \text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + 3\text{ಪಬ}(\text{ಪ} + \text{ಬ}) + \text{ಮು}^3 + 3(\text{ಪ}^2 + \text{ಬ}^2 + 2\text{ಪಬ})\text{ಮು} + \\
 & \quad + 3(\text{ಪ} + \text{ಬ})\text{ಮು}^2 \\
 & = \text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + \text{ಮು}^3 + 3\text{ಪಬ}(\text{ಪ} + \text{ಬ}) + 3(\text{ಪ}^2 + \text{ಬ}^2)\text{ಮು} + 6\text{ಪಬಮು} \\
 & \quad + 3(\text{ಪ} + \text{ಬ})\text{ಮು}^2 \\
 & = \text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + \text{ಮು}^3 + 3\text{ಪ}^2\text{ಬ} + 3\text{ಪಬ}^2 + 3\text{ಮುಪ}^2 + 3\text{ಬಮು}^2 + \\
 & \quad + 3\text{ಪಬಮು} + 3\text{ಮು}^2\text{ಪ} + 3\text{ಬಮು} \\
 & = \text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + \text{ಮು}^3 + 3\text{ಪ}^2\text{ಬ} + 3\text{ಪಬ}^2 + 3\text{ಬಮು}^2 + 3\text{ಬಮು}^2 + \\
 & \quad + 3\text{ಮು}^2\text{ಪ} + 3\text{ಮುಪ}^2 + 3\text{ಪಬಮು}.
 \end{aligned}$$

ಇದೇ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಪ+ಬ+ಮು+3ಪಬ(ಪ+ಬ)+3ಬಮು(ಬ+ಮು)+3ಮುಪ(ಮು+ಪ)+3ಪಬಮು ಎಂದೂ ಇಲ್ಲವೆ ಪ+ಬ+ಮು+3ಮು(ಬ+ಮು)+3ಬಮು(ಮು+ಪ)+3ಮು(ಪ+ಬ)+3ಪಬಮು ಎಂದೂ ಇಲ್ಲವೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಪ+ಬ+ಮು+3(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮು)(ಮು+ಪ) ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 & (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮು})^3 \\
 & = \{(\text{ಪ} + \text{ಬ}) + \text{ಮು}\}^3 \\
 & = (\text{ಪ} + \text{ಬ})^3 + \text{ಮು}^3 + 3\text{ಮು}(\text{ಪ} + \text{ಬ})(\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮು})
 \end{aligned}$$

- \equiv ಪ^೩ + ಬ^೩ + ೩.ಪಬ(ಪ + ಬ) + ಮ^೩ + ೩.ಮ(ಪ + ಬ)(ಪ + ಬ + ಮ)
 \equiv ಪ^೩ + ಬ^೩ + ಮ^೩ + ೩.(ಪ + ಬ) {ಪಬ + ಮ(ಪ + ಬ + ಮ)}
 \equiv ಪ^೩ + ಬ^೩ + ಮ^೩ + ೩.(ಪ + ಬ) {೩(ಬ + ಮ) + ಮ(ಬ + ಮ)}
 \equiv ಪ^೩ + ಬ^೩ + ಮ^೩ + ೩(ಪ + ಬ) ಬ + ಮ(ಮ + ಪ).

ಪ್ರಪದ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರದ ಈ ನಾಲ್ಕೂ ರೂಪಗಳು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವುದು ಇಷ್ಟವಾದುದು.

$$೧.೧೦. (ಪ + ಮ)^೩ \equiv ಪ^೩ + ಮ^೩ + ೩ಪಮ(ಪ + ಮ)$$

$$\text{ಮತ್ತು } (ಪ - ಮ)^೩ \equiv ಪ^೩ - ಮ^೩ - ೩ಪಮ(ಪ - ಮ)$$

ಈ ನಿತ್ಯಸಮಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ ನಮಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ^೩ + ಮ^೩ \equiv (ಪ + ಮ)^೩ - ೩ಪಮ(ಪ + ಮ) ಮತ್ತು ಪ^೩ - ಮ^೩ \equiv (ಪ - ಮ)^೩ + ೩ಪಮ(ಪ - ಮ) ಈ ನಿತ್ಯಸಮಗಳು ದೊರೆಯುವವು. ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಅಗಾಗ್ಗೆ ಆಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕದ್ದು.

೧.೧೧. ಮೂರರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು (ಪ + ಮ)^೩ ದ ಇಷ್ಟವೇ (ಪ + ಬ + ಮ)^೩ ದ ವಿಸ್ತಾರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು. ಇದರ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಹಿಂದೆ ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದೇ ಇದೆ.

$$\text{ಈಗ } (ಪ \pm ಮ)^೩ \equiv ಪ^೩ \pm ಮ^೩ \pm ೩ಪಮ(ಪ \pm ಮ)$$

ಈ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಬೇರೆ ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 ೧. ೧. (ಯ + ರ)^೩ &\equiv ೩.(ಯ + ರ)^೨(ಯ - ರ) + ೩.(ಯ + ರ)(ಯ - ರ)^೨ \\
 &- (ಯ - ರ)^೩ \text{ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.}
 \end{aligned}$$

ಯ + ರ ಮತ್ತು ಯ - ರ ಗಳ ನಿರ್ಣೇಶವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು ಮ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ರಾಶಿಯು \equiv ಪ^೩ - ೩ಪ^೨ಮ + ೩ಪಮ^೨ - ಮ^೩ *

$$= (ಪ-ಮ)^2 *$$

$$= \{(ಯ+ರ)-(ಯ-ರ)\}^2 \because ಪ=ಯ+ರ \text{ ಮತ್ತು } ಮ=ಯ-ರ$$

$$= (೨ರ)^2$$

$$= ೪ರ^2.$$

ಉ. ೨. ೮ (೩ಕ-೫ಗ) + ೩೬ (೩ಕ-೫ಗ)^೨ (೩ಗ-೨ಕ)

$$+ ೫೫ (೩ಕ-೫ಗ) (೩ಗ-೨ಕ)^2 + ೨೭ (೩ಗ-೨ಕ)^3$$

ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೨ (೩ಕ-೫ಗ) ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು ೩ (೩ಗ-೨ಕ) ದ

ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಮ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ,

$$\text{ರಾಶಿಯು} = ಪ^3 + ೩ಪ^2ಮ + ೩ಪಮ^2 + ಮ^3$$

$$= (ಪ+ಮ)^3 *$$

$$= \{೮ (೩ಕ-೫ಗ) + ೩೬ (೩ಗ-೨ಕ)\}^3$$

$$= (೬ಕ-೧೦ಗ+೧೬ಗ-೬ಕ)^3$$

$$= (-ಗ)^3$$

$$= -ಗ^3.$$

ಉ. ೩. (ಯ-ರ+ಸ)^೨ - ೩(ಯ-ರ+ಸ)^೨ (ಯ+ರ+ಸ)

$$+ ೩(ಯ-ರ+ಸ)(ಯ+ರ+ಸ)^2 - (ಯ+ರ+ಸ)^3$$

ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಯ-ರ+ಸ ದ ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು ಯ+ರ+ಸ ದ ಮ ದಿಂದ

ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$$\text{ರಾಶಿಯು} = ಪ^3 - ೩ಪ^2ಮ + ೩ಪಮ^2 - ಮ^3 *$$

$$= (ಪ-ಮ)^3 *$$

$$= \{(ಯ-ರ+ಸ)-(ಯ+ರ+ಸ)\}^3$$

$$= (-೨ರ)^3$$

$$= -೮ರ^3.$$

* ಪ, ಮ ಈ ಆವೇಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೪. $ಯ + ರ = ೭$, ಮತ್ತು $ಯರ = ೧೨$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^೩ + ರ^೩ = ?$

$$ಯ^೩ + ರ^೩ = (ಯ + ರ)^೩ - ೩ಯರ(ಯ + ರ)$$

$$= ೭^೩ - ೩ \times ೧೨ \times ೭$$

$$= ೩೪೩ - ೨೫೨$$

$$= ೯೧.$$

ಉ. ೫.

$ಸ = ೧೩೫$ ಮತ್ತು $ಮ = ೧೬೪$ ಇದ್ದರೆ

$$೧೨೫ಸ^೩ - ೩೦೦ಸ^೨ಮ + ೨೪೦ಸಮ^೨ - ೬೪ಮ^೩ = ?$$

$$೧೨೫ಸ^೩ - ೩೦೦ಸ^೨ಮ + ೨೪೦ಸಮ^೨ - ೬೪ಮ^೩$$

$$= (೫ಸ)^೩ - ೩(೫ಸ)^೨.೪ಮ + ೩.೫ಸ(೪ಮ)^೨ - (೪ಮ)^೩$$

$$= (೫ಸ - ೪ಮ)^೩$$

$$= (೫ \times ೧೩೫ - ೪ \times ೧೬೪)^೩$$

$$= (೬೬ - ೬೫)^೩$$

$$= (೧)^೩$$

$$= ೧.$$

ಉ. ೬. $ಯ - \frac{೧}{ಯ} = ೧೨$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^೩ - \frac{೧}{ಯ^೩} = ?$

$$ಯ^೩ - \frac{೧}{ಯ^೩} = \left(ಯ - \frac{೧}{ಯ} \right)^೩ + ೩ಯ \cdot \frac{೧}{ಯ} \left(ಯ - \frac{೧}{ಯ} \right)$$

$$= \left(ಯ - \frac{೧}{ಯ} \right)^೩ + ೩ \left(ಯ - \frac{೧}{ಯ} \right)$$

$$= \left(\frac{೨೩}{೨} \right)^೩ + ೩ \times \frac{೨೩}{೨}$$

$$= \frac{೨೭}{೪} + \frac{೬೯}{೨}$$

$$= ೩೬ + ೨೭$$

$$= ೬೩.$$

ಉ. ೭. $ಸ + \frac{೧}{ಸ} = ೮$ ಇದ್ದರೆ

$$ಸ^೩ + \frac{೧}{ಸ^೩} = ೮ - ೩೮ = ೩೦ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.$$

$$\begin{aligned} & \text{ಪ} + \frac{\text{ಓ}}{\text{ಪ್}} = \text{ಛ} \\ & \text{ಘನಮಾಡಿ, ಪ}^2 + \frac{\text{ಓ}}{\text{ಪ್}} + ೨\text{ಪ}\frac{\text{ಓ}}{\text{ಪ್}} \left(\text{ಪ} + \frac{\text{ಓ}}{\text{ಪ್}} \right) = \text{ಛ}^2 \\ & \therefore \text{ಪ}^2 + \frac{\text{ಓ}}{\text{ಪ್}^2} + ೨\text{ಪ}^2 = \text{ಛ} \end{aligned}$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ಪ}^2 + \frac{\text{ಓ}}{\text{ಪ್}^2} = \text{ಛ}^2 - ೨\text{ಪ}.$$

ಉ. ಲ. ಯ + ರ = ೨ ಇದ್ದರೆ

$$\begin{aligned} & \text{ಯ}^2 + \text{ರ}^2 + ೨\text{ಯರ} = \text{ಛ} \text{ ಎಂದು ನಿಶ್ಚಯಮಾಡಿರಿ.} \\ & \text{ಯ} + \text{ರ} = ೨ \\ & \text{ಘನಮಾಡಿದರೆ, ಯ}^2 + \text{ರ}^2 + ೨\text{ಯರ}(\text{ಯ} + \text{ರ}) = \text{ಛ} \\ & \therefore \text{ಯ}^2 + \text{ರ}^2 + ೨\text{ಯರ}(೨) = \text{ಛ} \quad \therefore \text{ಯ} + \text{ರ} = ೨ \\ & \therefore \text{ಯ}^2 + \text{ರ}^2 + ೨\text{ಯರ} = \text{ಛ}. \end{aligned}$$

ಉ. ಕ. (೫ಕ-೨ಗ)² - (೨ಕ-೫ಗ)² - ೬(೫ಕ-೨ಗ)(೨ಕ-೫ಗ)

(ಕ+ಗ) ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ

೫ಕ ೨ಗ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು

೨ಕ-೫ಗ ದ ಮ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ

$$\begin{aligned} & \text{ಪ-ಮ} = (೫ಕ-೨ಗ) - (೨ಕ-೫ಗ) = \\ & ೫ಕ-೨ಗ-೨ಕ+೫ಗ = ೩ಕ-೨ಗ = ೨(ಕ-ಗ). \text{ ಮತ್ತು} \\ & \text{ರಾಶಿಯು} = \text{ಪ}^2 - \text{ಮ}^2 - ೬\text{ಪಮ}(\text{ಪ}-\text{ಮ}) \\ & = (\text{ಪ}-\text{ಮ})^2 \\ & = \{೨(ಕ-ಗ)\}^2 \quad [\because \text{ಪ}-\text{ಮ} = ೨(ಕ-ಗ)] \\ & = ೪(ಕ^2 + ೨ಕಗ + ೨ಕಗ + ಗ^2). \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(ಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವಂಥವವಿವೆ.)

೧. ೨ಯ + ೨. ೨. ೪ರ - ೨. ೩. ೨ಯ + ೪ಪ್.

೪. ಪ+೨ಬ+೩ಮ. ೫. ೨ಪ-ಬ-೪ಮ. ೬. ೫ಯ-೨ರ+೩ಸ.
೭. ಪ೨-ಪ-೧. ೮. ಪ೨+ಪಮ+ಮ೨. ೯. ೩ಯ೨+೨ಯ+೧.

ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

೧೦. (ಯ-ನ)²-(ಯ-ಮ)²+೬(ನ-ಮ)(ಯ-ನ)(ಯ-ಮ).
೧೧. (೨ನ-೩ಮ)²-(೩ನ-೨ಮ)²+೩(೨ನ-೩ಮ)(೩ನ-೨ಮ)
(ನ+ಮ).
೧೨. ೮(ನ-೪ಮ)²-೧೨(ನ-೪ಮ)²(೪ನ-ಮ)+
೬(ನ-೪ಮ)(೪ನ-ಮ)²-(ನ-೪ಮ)².
೧೩. (ಯ+ರ+ಸ)²+(ಯ+ರ-ಸ)²-
೬(ರ+ಸ)(ಯ+ರ+ಸ)(ಯ-ರ+ಸ).
೧೪. (ಯ+೮-೫)²-(ಯ-೮+೫)²-
೬(೮-೫)²-(ಯ+೮-೫)(ಯ-೮+೫).
೧೫. ಪ+ಮ=೫ ಮತ್ತು ನಮ=೬ ಇದ್ದರೆ ಪ²+ಮ²=?
೧೬. ತ+ದ=೧ ಮತ್ತು ತದ=೪ ಇದ್ದರೆ ತ²+ದ²=?
೧೭. ನ-ಮ= -೩ ಮತ್ತು ನಮ= -೨ ಇದ್ದರೆ ನ²-ಮ²=?
೧೮. ನ+೧೧ = -೨ ಇದ್ದರೆ ನ+೧೧ = ?
೧೯. ಪ-೧೧ = ೨೩ ಇದ್ದರೆ ಪ²-೧೧² = ?
೨೦. ನ-೧೧ = ೧೩ ಇದ್ದರೆ ನ²-೧೧² = ?
೨೧. ಮ=೫ ಇದ್ದರೆ ಮ²-೧೫ಮ²+೨೫ಮ-೧೫ = ?
೨೨. ನ=೧೧ ಇದ್ದರೆ ನ²+ನ²+೧೧ನ²+೧೧ = ?
೨೩. ನ=೨ಮ=೩ ಇದ್ದರೆ ೨೨ನ²-೫೫ನ೨ಮ+೩೩ನಮ²-೮ಮ²=?
೨೪. ರ=೨೩, ಸ=೧೩ ಇದ್ದರೆ
೮ರ²+೩೩ರ²ಸ²+೫೫ರಸ²+೨೨ಸ²+೧೫ = ?
೨೫. ನ+ಮ=೭ ಇದ್ದರೆ
ನ²+ಮ²+೨೧ನಮ=೩೪೩ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

೨೬. ತ-ದ = ಲ ಇದ್ದರೆ

ತ-ದ-೨-೨೨ತದ=೨೨೨ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಡಿರಿ.

೨೭. ಕ+ಗ = ಖ ಇದ್ದರೆ

ಕ+ಗ+೨ಕಗ = ?

೨೮. ಪ-ಮ = ಳ ಇದ್ದರೆ

ಪ-ಮ+೨೨ ಪಮ = ?

೨೯. ಪ-ಬ = ಮ ಇದ್ದರೆ

ಪ-ಬ-೨-೨ಪಬಿಮ = ಮ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಡಿರಿ.

೩೦. ಲನ + ಮ = ಳ ಇದ್ದರೆ

ಲನ+ಮ+೨೨ಲನಮ-೨೨ = ೦ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಡಿರಿ.

೩೧. ಲನ-ಮ = ಲ ಇದ್ದರೆ

ಲನ-ಲಮ-೨-೨ಲನಮ = ೦ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಡಿರಿ.

೫.

(ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಮ) ≡ ಯ+ (ಪ+ಬ+ಮ)ಯ
+ (ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ)ಯ+ ಪಬಮ.

೦೦೧. ಹಿಂದೆ (ಫಾ. ೨. ಪು. ೭೪, ೭೫) ಯಾವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಪದವು ಸಾಧಾರಣವಿರುವದೋ ಅಂಥ ಮೂರು ಧ್ವನಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಮ್ಮೇಳ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಸಿದ್ಧವಾಡಿ.

(ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಮ)
≡ (ಯ+ಪಯ+ಬಯ+ಮಯ)(ಯ+ಮ)
≡ ಯ+ಪಯ+ಬಯ+ಪಮಯ+ಮಯ+ಮಮಯ+
ಬಮಯ+ಪಮ
≡ ಯ+ (ಪಯ+ಬಯ+ಮಯ)+
(ಪಮಯ+ಬಮಯ+ಮಮಯ)+ ಪಮ.
≡ ಯ+ (ಪ+ಬ+ಮ)ಯ+ (ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ)ಯ+ ಪಮ

ಯಾವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪದವು ಸಾಧಾರಣವಿರುವದೋ ಅಂಥ ಮೂರು ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ಘನ + ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ವರ್ಗ ಗುಣಿತೆ ಬೇರೆ ಮೂರು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು + ಸಾಧಾರಣ ಪದ ಗುಣಿತೆ ಬೇರೆ ಮೂರು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು + ಆ ಮೂರೂ ಭಿನ್ನ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಇಂದು ಇದೇ ಸಂಗತಿಯ ಸ್ವಲ್ಪ ಉಜ್ಜೇಷೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಒರೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೧. } (ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩) \\ &= ಯ^೩+(೧+೨+೩)ಯ^೨+(೧\cdot ೨+೨\cdot ೩+೩\cdot ೧)ಯ \\ &\quad + ೧\cdot ೨\cdot ೩ \\ &= ಯ^೩+೬ಯ^೨+೧೨ಯ+೬.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೨. } (ರ+೨)(ರ-೪)(ರ+೮) \\ &= ರ^೩+(೨-೪+೮)ರ^೨+(-೨\cdot ೪-೪\cdot ೮+೮\cdot ೨)ರ \\ &\quad -೨\cdot ೪\cdot ೮ \\ &= ರ^೩+೬ರ^೨-೨೪ರ-೬೪.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೩. } (ಸ-೨)(ಸ+೫)(ಸ-೧೦) \\ &= ಸ^೩+(-೨+೫-೧೦)ಸ^೨+ \\ &\quad (-೨\cdot ೫-೫\cdot ೧೦+೧೦\cdot ೨)ಸ+೧೦\cdot ೨ \\ &= ಸ^೩+೩ಸ^೨-೩೫ಸ+೨೦.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೪. } (ನ-೮)(ನ+೫)(ನ-೨) \text{ ಈ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ,} \\ (೮-೮)+೫+(-೨)=-೫, \\ (೮-೮)\cdot ೫+೫\cdot(-೨)+(-೨)(೮-೮)=-೪೦-೧೦+ \\ ೧೬=-೩೪, \\ \text{ಮತ್ತು } (೮-೮)\cdot ೫\cdot(-೨)=-೮೦, \text{ ಇದ್ದು ಮೊದ } \\ \text{ಇಷ್ಟು ಗುಣಾಕಾರವು }= ನ^೩-೫ನ^೨-೩೪ನ+೮೦.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೫. } & (\bar{ವ}-\bar{೩೩})(\bar{ವ}+\bar{೫೩})(\bar{ವ}-\bar{೩೩}) \\
 & = \bar{ವ}^3 + (-\bar{೩೩}+\bar{೫೩}-\bar{೩೩})\bar{ವ}^2 + \\
 & \quad (-\bar{೩೩}.\bar{೫೩}+\bar{೫೩}.\bar{೩೩}+\bar{೩೩}.\bar{ವ})\bar{ವ} + (-\bar{೩೩})(\bar{೫೩})(-\bar{೩೩}) \\
 & = \bar{ವ}^3 - \bar{೫೩}\bar{ವ}^2 - \bar{೩೩}\bar{ವ}^2 + \bar{೩೩}\bar{೫೩}\bar{ವ} + \bar{೩೩}\bar{೩೩}\bar{ವ}.
 \end{aligned}$$

$$\text{ಉ. ೬. } (\bar{ಅ}-\bar{೧೧})(\bar{ಅ}-\bar{೬})(\bar{ಅ}-\bar{೨}) - (\bar{ಅ}-\bar{೬})^2(\bar{ಅ}-\bar{೬})$$

ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಬೇ.

$$\begin{aligned}
 & (\bar{ಅ}-\bar{೧೧})(\bar{ಅ}-\bar{೬})(\bar{ಅ}-\bar{೨}) \\
 & = \bar{ಅ}^3 - (\bar{೧೧}+\bar{೬}+\bar{೨})\bar{ಅ}^2 + (\bar{೧೧}.\bar{೬}+\bar{೬}.\bar{೨}+\bar{೨}.\bar{೧೧})\bar{ಅ} \\
 & \quad - \bar{೧೧}.\bar{೬}.\bar{೨} \\
 & = \bar{ಅ}^3 - \bar{೧೯}\bar{ಅ}^2 + \bar{೧೦೦}\bar{ಅ} - \bar{೧೨೨} \\
 & \quad (\bar{ಅ}-\bar{೬})^2(\bar{ಅ}-\bar{೬}) \\
 & = \bar{ಅ}^3 - (\bar{೬}+\bar{೬}+\bar{೬})\bar{ಅ}^2 + (\bar{೬}.\bar{೬}+\bar{೬}.\bar{೬}+\bar{೬}.\bar{೬})\bar{ಅ} - \bar{೬}.\bar{೬}.\bar{೬} \\
 & = \bar{ಅ}^3 - \bar{೧೮}\bar{ಅ}^2 + \bar{೧೦೮}\bar{ಅ} - \bar{೨೧೬} \\
 \therefore \text{ರಾಶಿಯು} & = (\bar{ಅ}^3 - \bar{೧೯}\bar{ಅ}^2 + \bar{೧೦೦}\bar{ಅ} - \bar{೧೨೨}) \\
 & \quad - (\bar{ಅ}^3 - \bar{೧೮}\bar{ಅ}^2 + \bar{೧೦೮}\bar{ಅ} - \bar{೨೧೬}) \\
 & = \bar{ಅ} - \bar{೨}\bar{ಅ} + \bar{೧೦೮}.
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿನ, ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ $\bar{ಅ}-\bar{೬}$ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಅನುಪಮವೆನಿಸುವುದು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯವಿಟ್ಟುಕೊಂಡು

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} & = (\bar{ಅ}-\bar{೬})\{(\bar{ಅ}-\bar{೧೧})(\bar{ಅ}-\bar{೨}) - (\bar{ಅ}-\bar{೬})(\bar{ಅ}-\bar{೬})\} \\
 & = (\bar{ಅ}-\bar{೬})\{(\bar{ಅ}^2 - \bar{೧೨}\bar{ಅ} + \bar{೨೨}) - (\bar{ಅ}^2 - \bar{೧೨}\bar{ಅ} + \bar{೩೬})\} \\
 & = (\bar{ಅ}-\bar{೬})(\bar{ಅ}-\bar{೬})
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ರೀತಿಯು ಮೊದಲನೆಯದರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭ ಮತ್ತು ತೀವ್ರವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೮.

ಕೆಳಗಿನ ದ್ವಿಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ. ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

$$೧. \bar{ಯ}+\bar{೫}, \bar{ಯ}+\bar{೪}, \bar{ಯ}+\bar{೩}. \quad ೨. \bar{೬}-\bar{೩}, \bar{೬}+\bar{೩}, \bar{೬}-\bar{೬}.$$

೩. ವ-೮,ವ-೧೦,ವ-೩. ಳ. ೫-ಮ,೩-ಮ,೧೦-ಮ.
 ೫. ೫-೩೩,೫-೨೩,೫+೩೩. ೬. ೨೩+೫,೨೩+೩,೨೩+೩.
 ೭. ೮ರ+೧,೮ರ-೫,೮ರ+೩ ಳ. ೩ರ+೨೩,೩ರ-೫೩,೩ರ+೩೩.
 ೯. ೫ಯ-೨೩,೫ಯ-೩,೫ಯ-೪೩
 ೧೦. ೩+೩ಪ, ೨೩+೩ಪ, ೩೩+೩ಪ.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧೧. (ಯ-೫)(ಯ+೮)(ಯ-೧೦)-(ಯ+೮)²(ಯ-೨).
 ೧೨. (ರ-೩)(ರ+೩)(ರ+೨)-(ರ+೨)²(ರ-೫).
 ೧೩. (ವ+೧೦)(ವ-೨)(ವ+೫)-(ವ+೫)²(ವ+೪).
 ೧೪. (೨ಸ-೩)(೨ಸ-೫)(೨ಸ-೯)-(೨ಸ-೫)².
 ೧೫. (೩ಸ-೧)(೩ಸ-೨)(೩ಸ-೫)-(೩ಸ+೧)(೩ಸ-೨)(೩ಸ-೪)

ಇದಕ್ಕೆ ಸ-೧ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೧೬. (೫ಸ+೩)(೫ಸ-೧)(೫ಸ-೨)-(೫ಸ-೧)²(೫ಸ-೪) ಇದಕ್ಕೆ
 ೩ಸ-೧ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣ (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದುದು)

೧.

ಪ^೨-ಮ^೨ ≡ (ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)

ಅ.೧. ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆಂದು ನಾವು ಹಿಂದೆ (ಭಾ. ೨, ಪು. ೧೧೪, ೧೧೯) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಯಾವದಾದರೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ಅಂತರದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬಂದರೆ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ಅಲ್ಲಿ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನಾದರೂ ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. (ಭಾ. ೨, ಪು. ೧೨೧). ಇಂದು ಈಗ ಇದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವಾ.

ಉ. ೧. ೬೪ನ^೨+೧. ಇಲ್ಲಿ ೬೪ನ^೨ ಇದು ೮ನ^೨ದ ವರ್ಗವಿದ್ದು ೮ನ^೨ ಮತ್ತು ೧ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು (೧೬ನ^೨) ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

೬೪ನ^೨+೧=೬೪ನ^೨+೧೬ನ^೨+೧-೧೬ನ^೨

= (೮ನ^೨+೧)^೨-(೪ನ^೨)

= (೮ನ^೨+೪ನ+೧)(೮ನ^೨-೪ನ+೧).

ಉ. ೨. ಯ^೨+೨ಯ^೨+೯=ಯ^೨+೬ಯ^೨+೯-೪ಯ^೨

= (ಯ^೨+೩)^೨-(೨ಯ^೨)

= (ಯ^೨+೨ಯ+೩)(ಯ^೨-೨ಯ+೩).

ಉ. ೩. ೪ಪ^೨-೯ಬ^೨+೩೦ಬಮ-೨೫ಮ^೨

= ೪ಪ^೨-(೯ಬ^೨-೩೦ಬಮ+೨೫ಮ^೨)

= (೨ಪ^೨)-(೩ಬ-೫ಮ)^೨

$$= (ಅಪ+ಇಬ-ಇಮ)(ಅಪ-ಇಬ+ಇಮ).$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೪. } & (ಅಬಮ-ಇಭ)+ಪ-ಬ+ಭ-ಮ \\ & = ಪ-ಅಪಭ+ಭ-ಬ+ಅಬಮ-ಮ \\ & = (ಪ-ಅಪಭ+ಭ)-(ಬ-ಅಬಮ+ಮ) \\ & = (ಪ-ಭ)-(ಬ-ಮ) \\ & = \{(ಪ-ಭ)+(ಬ-ಮ)\} \{(ಪ-ಭ)-(ಬ-ಮ)\} \\ & = (ಪ+ಬ-ಭ-ಮ)(ಪ-ಬ-ಭ+ಮ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೫. } & ಇಯ+ಇಯವ+ಇವ \\ & = ಇಯ+ಅಯವ+ಇವ-ಇಯವ \\ & = (ಇಯ+ಇವ)-ಇಯವ \\ & = (ಇಯ+ಇಯವ+ಇವ)(ಇಯ-ಇಯವ+ಇವ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೬. } & ಇಪ-ಬ-ಮ+ಅಪಬ+ಅಬಮ-ಅಮಪ \\ & = ಇಪ-(ಪ+ಬ+ಮ-ಅಪಬ-ಅಬಮ+ಅಮಪ) \\ & = (ಇಪ)-(ಪ-ಬ+ಮ) \\ & = \{ಇಪ+(ಪ-ಬ+ಮ)\} \{ಇಪ-(ಪ-ಬ+ಮ)\} \\ & = (ಇಪ-ಬ+ಮ)(ಇಪ+ಬ-ಮ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೭. } & (ಅ-ಕ)(ಯ-ರ)-ಅಕಯರ \\ & = ಅಯ-ಅರ-ಕಯ+ಕರ-ಅಕಯರ \\ & = (ಅಯ-ಅಕಯರ+ಕರ)- \\ & \quad (ಕಯ+ಅರ) \\ & = (ಅಯ-ಕರ)-(ಕಯ+ಅರ) \\ & = (ಅಯ-ಕರ+ಕಯ+ಅರ)(ಅಯ-ಕರ-ಕಯ-ಅರ) \\ & = \{(ಅ+ಕ)ಯ+(ಅ-ಕ)ರ\} \{(ಅ-ಕ)ಯ-(ಅ+ಕ)ರ\} \end{aligned}$$

ಉ. ೮. ಇಯ-ಅಯ-ಅಬ+ಅಬರ-ಇರ. ಇಲ್ಲಿ ಇಯ-ಅಯ ಈ ಜೋಡಿಗೆ ೫, ಅಂದರೆ ೨೫ ಇದ್ದರೆ ಅದು (ಇಯ-ಅಯ+೨೫) ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ವಾಕ್ಯ ಪುನರ್ವಚನೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು:

$$\begin{aligned}
 \text{ಪಾಶಿಯು} &= \text{ಅಯಿ} - \text{ಒಯ} + \text{ಅಃ} - \text{ಅಃ} + \text{ಅಃ} - \text{ಃ} \\
 &= (\text{ಅಯಿ} - \text{ಒಯ} + \text{ಅಃ}) - (\text{ಅಃ} - \text{ಅಃ} + \text{ಃ}) \\
 &= (\text{ಅಯ} - \text{ಃ}) - (\text{ಒ} - \text{ಃ}) \\
 &= \{(\text{ಅಯ} - \text{ಃ}) + (\text{ಒ} - \text{ಃ})\} \{(\text{ಅಯ} - \text{ಃ}) - (\text{ಒ} - \text{ಃ})\} \\
 &= (\text{ಅಯ} - \text{ಃ} + \text{ಒ}) (\text{ಅಯ} + \text{ಃ} - \text{ಒ}).
 \end{aligned}$$

೨.೨. ಪಿ-ಮಿ = (ಪ+ಮ) (ಪ-ಮ) ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗ-
ವನ್ನು ಮಾಡಿ ಯಿ+ಕಯ+ಗ ಇಲ್ಲವೆ ಆಯಿ+ಕಯ+ಗ ದಂಥ
ವರ್ಗಪ್ರಪದಿಯ ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು
ಹಿಂದೆ (ಭಾ. ೨, ಪು. ೧೫೦-೧೬೧) ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅವರ ಸ್ವಲ್ಪ ಪುನ-
ರಾವಲೋಕನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡುವಾ.

ವರ್ಗಪದವ ಸಹಗುಣಕವು ೧ ಇರುವ ಯಿ-ಒಯ-೩೭೪ ರಂಥ
ವರ್ಗಪ್ರಪದಿಯ ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ
ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ನಾವು ಏನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ? ಯಿ-ಒಯ ದ ಜೊತೆಗೆ
೩೭೪ ವರ್ಗ ಅಂದರೆ ಅಃ ಇದ್ದರೆ ಯಿ-ಒಯ+ಅಃ ಇದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ-
ವಾಗುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟು ಪಾಶಿಯನ್ನು ಹೊಸ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ
ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸುವೆವು.

ಉ. ೯. ಯಿ-ಒಯ-೩೭೪

$$\begin{aligned}
 &= \text{ಯಿ} - \text{ಒಯ} + \frac{೨೫}{೪} - \frac{೧೫೨೧}{೪} \\
 &= \left(\text{ಯ} - \frac{೫}{೨} \right)^೨ - \left(\frac{೩೯}{೨} \right)^೨ \\
 &= \left(\text{ಯ} - \frac{೫}{೨} - \frac{೩೯}{೨} \right) \left(\text{ಯ} - \frac{೫}{೨} + \frac{೩೯}{೨} \right) \\
 &= (\text{ಯ} + ೧೭) (\text{ಯ} - ೨೨).
 \end{aligned}$$

ಉ. ೧೦. ಅಯಿ+೪೭ಯ-೨೪

$$= ೨೫ \left(\text{ಯಿ} + \frac{೪೭}{೨೫} \text{ಯ} - \frac{೨೪}{೨೫} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= ೩೫ \left\{ ಯ^೨ + \frac{೪೬}{೩೫} ಯ + \left(\frac{೨೩}{೩೫} \right)^೨ + \left(\frac{೨೩}{೩೫} \right)^೨ - \frac{೨೪}{೩೫} \right\} \\
&= ೩೫ \left\{ ಯ^೨ + \frac{೪೬}{೩೫} ಯ + \left(\frac{೨೩}{೩೫} \right)^೨ + \frac{೧೩೬೯}{೩೫ \times ೩೫} \right\} \\
&= ೩೫ \left\{ \left(ಯ + \frac{೨೩}{೩೫} \right)^೨ - \left(\frac{೩೭}{೩೫} \right)^೨ \right\} \\
&= ೩೫ \left(ಯ + \frac{೨೩}{೩೫} + \frac{೩೭}{೩೫} \right) \left(ಯ + \frac{೨೩}{೩೫} - \frac{೩೭}{೩೫} \right) \\
&= ೭ \times ೫ \left(ಯ + \frac{೧೨}{೭} \right) \left(ಯ - \frac{೨}{೫} \right) \\
&= (೭ಯ + ೧೨)(೫ಯ - ೨).
\end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೇಲಿರುವ ಯ^೨-೨ಕಯ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಯ^೨ + ೨ಕಯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ^೨ವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ.

ಇದರಂತೆಯೇ ವರ್ಗಾಂತರಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ **ಅಯ^೨ + ಕಯ + ಗ** ವಂಥ ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದಿಯ ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಪುರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಸುಲಭವಾದ ಮತ್ತು ತೀವ್ರವಾದ ರೀತಿಯು ನೆನಪಿಗೆ ಬಾರದಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೯.

ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಪುರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. ಬ^೨—೧೮ಬ + ೮೧—೯ಮ^೨. ೨. ೪೮೨ + ೨೮೮ + ೪೯ — ೨೫ಕ^೨.
೩. ೨೫೮ — ೨೦೮ಕ + ೪ಕ — ೪ಗ^೨ + ೪ಗಘ — ಘ^೨.
೪. ೮೨ + ೪ಕ೪. ೫. ೮೧ಪ೪ + ೬೪ಮ೪.
೬. ೩೨೪ರ೪ + ೬೫ಸ೪. ೭. ಯ೪ — ೩ಯ^೨ + ಗ.
೮. ಪ೪ — ೧೧ಸಮ + ಮ೪. ೯. ೯ಯ೪ — ೧೩ಯ^೨ರ೨ — ೪ರ೨.
೧೦. ೬೪ಮ೪ + ೨೩ಮ^೨ಯ^೨ + ೯ಯ೪.

೧೦. ಲಗಪಿ — ಲಗಪಿಮು + ಲಮಳಿ.
 ೧೧. ಲಯಿ + ಅಯಿ + ಗಿ — ಅಲರ — ಗಿಲರ.
 ೧೨. ಲಗನಿ — ಲಗನಿ — ಅನ + ಲಮ + ಲಿ.
 ೧೩. ಲರ — ಸಿ — ಗಿಲರ — ಗಿಲರ — ಗಿಲ.
 ೧೪. ಯಿ + ರಿ — ಲಿ — ಸಿ + ಅಯಿರ + ಅಲವ.
 ೧೫. ಲತ + ಅಗದಿ — ಲಗನಿ — ಅಂತರ + ಅಲನ — ಗಿಲ.
 ೧೬. ಲಗನಿ — ಲಗನಿ — ಗಿಲಗಿ + ಅಂತರ + ಅಲಕನ.
 ೧೭. ಲಗನಿ + ಅಗನಿಮು + ಲಮನಿಮು — ಗಿಲಪಿ — ಬಿ — ಮ.
 ೧೮. ಗಿಲಯಿ — ಲರ — ಲಿ + ಗಿಲಯಿರ + ಲರಲ — ಲಲಯ.
 ೧೯. ಗಿಲಯಿ + ಲಲಯ + ಲಿ. ೨೦. ಅಗನಿ — ಅಗನಿ — ಅ . .
 ೨೧. ಲಗನಿ — ಅಗನಿ — ಅಲಕನ.
 ೨೨. ಅಗನಿ — ಅಗನಿ — ಅಲಕನ.
 ೨೩. ಅಗನಿ — ಅಗನಿ — ಅಲಕನ.
 ೨೪. ಅಲಕನಿ + ಅಲಕನಿ — ಅಲಕನಿ. ೨೫. ಅಗನಿ — ಅಗನಿ + ಗಿ.

೨.

ಪಿ ± ಮು ≡ (ಪಿ ± ಮು) (ಪಿ ± ಪಮು + ಮು)

೨-೨. ಹಿಂದೆ (ಭಾಗ ೨ ಪು. ೧೨೨) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೇಜು = ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೇಜು × (ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೇಜು — ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ) ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ = ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ × (ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೇಜು + ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ) ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಈ ನಿಯಮದ ಬುಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಅದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅಂಥವೇ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬುಪಯೋಗಿಸುವಾ.

ಉ. ೧. ಯಿ + ಲಯಿ + ಅಯಿ + ಗಿ. ಇಲ್ಲಿ ಯಿ + ಲಯಿ + ಅಯಿ ದ ಜೊತೆಗೆ ಅನಿಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದು ಯಿ + ಲಿ ಇವರ ಘನವಾಗುವದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಅದುದರಿಂದ

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

ಉ.ಖ. ಅಳಿ-ಒಳ-ಳಿ-ಒಳ ದ-ಒಳ ಮತ್ತು + ಒಳ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು
ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ-ಒಳ-ಳಿ = ಒಳ-ಒಳ + ಒಳ-ಳಿ

$$= \psi(\psi^2 - \psi) + \psi(\psi - 2)$$

$$= 3(3-2)(3^2+3^2+2)+2(3-2)$$

$$= (x-2) \{ x(x^2 + 2x + 2) + 2 \}$$

$$= (c - 3)(c^2 + 3c^2 + 9c + 3).$$

೫. ೬. ಯತಿ + ಭಯ - ಇವು - ೬೦. - ೬೦ ಶಬ್ದ - ೬೪ ಮುಕ್ತೆ + ೪
 ಹೇಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ

$$ಮೈ + ೪ಮೈ - ೧೭ಮೈ - ೬೦ = ಮೈ - ೬೪ + ೪ಮೈ - ೧೭ಮೈ + ೪$$

$$= (\text{ယူ} - ၁)(\text{ယူ} + ၁) + (\text{ယူ} - ၁)(\text{ယူ} - ၁)$$

$$= (y - x)(y^3 + xy^2 + x^2y + y^3 - 1)$$

$$= (y - x)(y^2 - xy + x^2)$$

$$= (x - 2)(x + 3)(x + 5).$$

ಜ್ರತ್ಯ ಸಂಗ್ರಹ ೧೦.

ಗುಣಿ ಪೃಥಕ್ಪರಣಿವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

८. ८७५३—७५३—७८५३.

૭. ૪-૪૩૧ + ૩૩૧ - ૩૩૧.

೩. ಕೃ-ಽಕೃ-೧೦ಕ+ಅಘ್ರ. ೪. ಜೃ-೧೦ಜೃ+ಅಘ್ರ-೦.

ಜಿ. ಅಭಯ + ಅರಯ - ಅರಯ - ಅ.

੬. ਭੁਰੀ - ਭੁਰੀ + ਰ - ਨ. ੭. ਰੀ - ਭੁਰੀ + ਨਭ.

೮. ಅನಿಲಿ - ಇಲಿ + ನಿ. ೯. ಮು + ನಿಮಿ - ನಿಲಿ.

၈၀. ဗုဒ္ဓ - ၃၂၅ + ၈၀၀. ၈၀. ဗုဒ္ဓ + ၃၂၅ + ၈.

೧೨. $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2$. ೧೩. $(x+y)^2 - (x-y)^2$

೧೪. $(a-b)^2 - (c-d)^2$. ೧೫. $(x-y)^2 + 2x(y+z)$.

೧೬. $y^3 + 3x^2y + (3xy + 3)$ ೧೭. $4x^2 - 2x + 3$.

೧೮. ಟ್ರಗಿ೨—ಕುಗಿ೨. ೧೯. ಇಳಿಹಸುತಮ೨—ಓಲಸುತಮ೨.

೨೦. ಖ೧೩೩೩—೧೨೫೩೩.

೨೧. (ಪ+೩)^೩—೩೨೯.೨೨. (ನ೩—೧)^೨—(ನ—೧)^೨.೨೩. ಪ=೨೮, ಮ=—೩ ಇದ್ದರೆ (೩ಪ—೫ಮ)^೨ + (೨ಪ+೩ಮ)^೨ = ?೨೪. ಅ=೫.೩, ಕ=೮.೬೫, ಗ=—೫.೩ ಇದ್ದರೆ (ಅ+೨ಕ)^೨
—(೨ಕ—ಗ)^೨ = ?

೩-

(ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಭ)(ಯ+ಮ)+ಕ.

೨.೮. ಮೊದಲನೆಯ ಪದವು ಒಂದೇ ಇರುವಂಥ ನಾಲ್ಕು ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಹಲವು ಸಾರೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಉ. ೧. (ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೪)(ಯ+೫)+೨ ಇಲ್ಲಿ (ಯ+೧) ಮತ್ತು (ಯ+೫) ಇವೆರಡರ ಮತ್ತು (ಯ+೨) ಮತ್ತು (ಯ+೪) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಎರಡೂ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು ಅವೇ ಅದರ ಯ^೨+೬ಯ ಬರುವವು. ಮತ್ತು ಯ^೨+೬ಯ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಆ ಈ ಆಶೀಶದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂಚಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 & (ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೪)(ಯ+೫)+೨ \\
 & = \{ (ಯ+೧)(ಯ+೫) \} \{ (ಯ+೨)(ಯ+೪) \} + ೨ \\
 & = (ಯ^೨+೬ಯ+೫)(ಯ^೨+೬ಯ+೮)+೨ \\
 & = (ಅ-೫)(ಅ+೮)+೨ \\
 & = ಅ^೨+೧೩ಅ+೪೨ \\
 & = (ಅ+೬)(ಅ+೭) \\
 & = (ಯ^೨+೬ಯ+೬)(ಯ^೨+೬ಯ+೭)
 \end{aligned}$$

[∴ ಅ=ಯ^೨+೬ಯ

ಉ. ೨. (ರ-೨)(ರ-೫)(ರ-೧)(ರ+೩)+೧೫. ಇಲ್ಲಿ ರ-೨ ಮತ್ತು ರ+೩ ಹಾಗೂ (ರ-೫) ಮತ್ತು ರ+೧ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಂಪು ರ-೪ರ ಇರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ

$$\begin{aligned} &= \{(ರ-೨)(ರ+೩)\} \{(ರ+೫)(ರ+೧)\} + ೧೫ \\ &= (ರ-೪ರ-೨೧)(ರ-೪ರ-೫) + ೧೫ \\ &= (ಅ-೨೧)(ಅ-೫) + ೧೫ \quad [ರ-೪ರ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ಆದೇಶಿಸಿ] \\ &= ಅ-೨೬ಅ + ೧೨೦ \\ &= (ಅ-೨೦)(ಅ-೬) \\ &= (ರ-೪ರ-೨೦)(ರ-೪ರ-೬) \quad [\because ಅ = ರ-೪ರ] \end{aligned}$$

ಉ. ೩. (ಓನ-೫)(ಓನ-೨)(ಓನ+೧೦)(ಓನ+೨)-೩೭. ಇಲ್ಲಿ -೫+೧೦=೫, ಮತ್ತು -೨+೨=೦. ಅದುದರಿಂದ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ಓನ-೫ ಮತ್ತು ಓನ+೧೦ ಹಾಗೂ ಓನ-೨ ಮತ್ತು ಓನ+೨ ಹೀಗೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ರಾಶಿಯು

$$\begin{aligned} &= \{(ಓನ-೫)(ಓನ+೧೦)\} \{(ಓನ-೨)(ಓನ+೨)\} - ೩೭ \\ &= (ಫನ+೧೫ನ-೫೦) (ಫನ+೧೫ನ-೧೪) - ೩೭ \\ &= (ಅ-೫೦)(ಅ-೧೪) - ೩೭ \quad [ಫನ+೧೫ನ ದ ಬದಲಾಗಿ] \\ &= ಅ-೬೪ಅ + ೬೬೨ \quad \text{ಅ ಇಟ್ಟು} \\ &= (ಅ-೫೦)(ಅ-೧೩) \\ &= (ಫನ+೧೫ನ-೫೦)(ಫನ-೧೫ನ-೧೩) \\ &[\because ಅ = ಫನ+೧೫ನ] \\ &= ೩(ಓನ-೫ನ-೧೩)(ಫನ-೧೫ನ-೧೩). \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವವೇನೆಂದರೆ ಯಾವ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಪದಗಳು ಒಂದೇ ಇರುವವೋ ಅಂಥ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿ ರೂಪಕ್ಕಾಗಿ ಇದೇ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

ಉ. ೪. (ಯ+೫)(ಯ+೪)(ಅಯ—೩)(ಅಯ—೧)—೧೨.

ಎರಡೂ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಯ^೨—ಪ ದ ಮತ್ತು ಯ—ಪ ದ ಇವು ಒಂದೇ ಇರುವಂಥ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಆರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅಂಥ ಜೋಡಿಗಳು ಯ+೫ ಮತ್ತು ಅಯ—೩ ಹಾಗೂ ಯ+೪ ಅಯ—೧. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಒಂದ ಅಯ^೨—೩ಯ ಇರುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕುರಣಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯ ಪುನರ್ವಿಜನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned} \text{ರಾಶಿಯು} &= \{(ಯ+೫)(ಅಯ—೩)\} \{(ಯ+೪)(ಅಯ—೧)\} - ೧೨ \\ &= (ಅಯ^೨ + ಅಯ—೧೫)(ಅಯ^೨ + ಅಯ—೪) - ೧೨ \\ &= (ಅ—೧೫)(ಅ—೪) - ೧೨ [ಅಯ^೨ + ಅಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ \\ &= ಅ^೨ - ೧೯ಅ + ೪೮ \hspace{10em} \text{ತೆಗೆದುಕೊಂಡು} \\ &= (ಅ—೧೬)(ಅ—೩) \\ &= (ಅಯ^೨ + ಅಯ—೧೬)(ಅಯ^೨—ಅಯ—೩) \end{aligned}$$

$$[\because \text{ಅ} = ಅಯ^೨ + ಅಯ]$$

ಉ. ೫. ಯ (ಯ+೫ಕ)(ಯ—ಕ)(ಯ—೬ಕ) + ೧೪೪ಕ೪. ಇಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು ಯ—೪ ಹಾಗೂ ಯ—೫ಕ ಮತ್ತು ಯ—೬ಕ ಹೀಗೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\begin{aligned} \text{ರಾಶಿಯು} &= \{ಯ (ಯ—ಕ)\} \{(ಯ+೫ಕ)(ಯ—೬ಕ)\} + ೧೪೪ಕ೪ \\ &= (ಯ^೨—ಕಯ)(ಯ^೨—ಕಯ—೩೦ಕ೨) + ೧೪೪ಕ೪ \\ &= ಅ (ಅ—೩೦ಕ೨) + ೧೪೪ಕ೪ [ಅಯ^೨—ಕಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ \\ &= ಅ^೨—೩೦ಕ೨ಅ + ೧೪೪ಕ೪ \hspace{10em} \text{ಇಟ್ಟು} \\ &= (ಅ—೬ಕ೨)(ಅ—೨೪ಕ೨) \\ &= (ಯ^೨—ಕಯ—೬ಕ೨)(ಯ^೨—ಕಯ—೨೪ಕ೨) \\ &[\because \text{ಅ} = ಯ^೨—ಕಯ] \\ &= (ಯ—೩ಕ)(ಯ+೨ಕ)(ಯ^೨—ಕಯ—೨೪ಕ೨) . \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೧.

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ತರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

೧. (೮+೨)(೮+೬)(೮+೯)(೮+೫)+೨೦.
೨. (ವ-೨)(ವ-೪)(ವ-೨)(ವ-೬)-೩೬.
೩. (ಚ-೪)(ಚ-೨)(ಚ+೫)(ಚ+೬)+೮೦.
೪. ಪ(ಪ-೧)(ಪ+೫)(ಪ+೬)-೬೨.
೫. ಗ(ಗ+೧)(೩ಗ-೨)(೩ಗ-೫)+೪.
೬. (೪ಯ-೩)(೪ಯ-೧)(೪ಯ+೫)(೪ಯ+೭)+೫೫.
೭. ಯ(ಯ-೨ನ)(ಯ+೪ನ)(ಯ+೬ನ)+೨೫ನ೪.
೮. (೨ರ-೩ನ)(೨ರ-೫ನ)(೨ರ-೭ನ)(೨ರ-೯ನ)+೧೧ನ೪.
೯. (೩ರ-೫ಕ)(೩ರ-೪ಕ)(೩ರ+೪ಕ)(೩ರ+೨ಕ)-೫೫ಕ೪.

ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ೩ ಪಬಮ = (ಪ + ಬ + ಮ)

(ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ಪಬ - ಬಮ - ಮಪ)

೪.

೨೫. ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಅವೆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಈ ಸ್ವರೂಪದ ರಾತ್ರಿ-ಯಿದ್ದರೆ ಅದರ ಗುಣ ಪ್ರಥಕ್ತರಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ೩ ಪಬಮ

≡ (ಪ + ಬ)^೨ - ೩ ಪಬ(ಪ + ಬ) + ಮ^೨ - ೩ ಪಬಮ

≡ (ಪ + ಬ)^೨ + ಮ^೨ - ೩ ಪಬ(ಪ + ಬ) - ೩ ಪಬಮ

≡ (ಪ + ಬ + ಮ) { (ಪ + ಬ)^೨ - ಮ(ಪ + ಬ) + ಮ^೨ }
- ೩ ಪಬ(ಪ + ಬ + ಮ)

≡ (ಪ + ಬ + ಮ)(ಪ^೨ + ೨ಪಬ + ಬ^೨ - ಮಪ - ಬಮ + ಮ^೨ - ೩ ಪಬ)

≡ (ಪ + ಬ + ಮ)(ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ಪಬ - ಬಮ - ಮಪ)

ಮೊದಲನೆಯ ಹಂತಿನಲ್ಲಿ ಪ^೨ - ಬ^೨ ಇದು ಎರಡು ಘನಗಳಿಂದಾದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು (ಘನಗಳ ಇದೇ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬಿಲ್ಲ. ಯಾವುದಾದರೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಬರುವದು) (ಪ + ಬ)^೨ - ೩ ಪಬ(ಪ + ಬ)

ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲಕ ಮೂಲರಾಶಿಯ ಈ ಬದಲಿಸಿದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಘನಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಎರಡು ಘನಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ. ಈಗ ಎರಡು ಘನಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ತಿಳಿಯಲು ನಮಗೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಹಾಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಮೂರನೇ ಹಂತಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. ಹೀಗೆ ಪ್ರಮಾದಿಂದ ಹೋದಂತೆ ಆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ಬೋರೆಯುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಬೇರೊಂದು ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣ್ಣೆ ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇರೆ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಒರೆಯುವ-
ದಿಂದ:

ಪ^೩ + ಬ^೩ + ಮ^೩ — ೩ಪಬಮ

≡ (ಪ + ಬ + ಮ) (ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ — ಪಬ — ಬಮ — ಬಮ)

≡_೩ (ಪ + ಬ + ಮ) (೨ಪ^೨ + ೨ಬ^೨ + ೨ಮ^೨ — ೨ಪಬ — ೨ಬಮ — ೨ಮಪ)

≡_೩ (ಪ + ಬ + ಮ) {(ಪ^೨ — ೨ಪಬ + ಬ^೨) + (ಬ^೨ — ೨ಬಮ + ಮ^೨) + (ಮ^೨ — ೨ಮಪ + ಪ^೨)}

≡_೩ (ಪ + ಬ + ಮ) {(ಪ — ಬ)^೨ + (ಬ — ಮ)^೨ + (ಮ — ಪ)^೨}.

೨.೬. ಮೇಲಿನ ಗುಣಕಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಈಗ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

ಉ. ೧. ೨ಯ^೩ + ೨೨ರ^೩ + ೨೩ — ೧೨ಯರಲ. ಇಲ್ಲಿ ೨ಯ^೩ ಮತ್ತು ೨೨ರ^೩ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨ಯ ಮತ್ತು ೨ರ ಇವುಗಳ ಘನಗಳಿದ್ದು ೧೨ಯರಲ ಇದು ೨ಯ, ೨ರ ಮತ್ತು ೨ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮೂಮ್ಮಡಿ ಇರುವದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದು.

ರಾಶಿಯು = (೨ಯ)^೩ + (೨ರ)^೩ + ೨೩ — ೩. ೨ಯ. ೨ರ. ೨

= (೨ಯ + ೨ರ + ೨)

(೨ಯ^೨ + ೨ರ^೨ + ೨೨ — ೨ಯರ — ೨ರಲ — ೨ಲಯ).

ಉ. ೨. ತ^೩ — ದ^೩ + ನ^೩ + ೩ತದನ. — ದ^೩ = + (—ದ)^೩, ಮತ್ತು ೩ತದನ = — ೩ತ(—ದ)ನ.

$$\begin{aligned} \therefore \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ತ}^2 + (-\text{ವ})^2 + \text{ನ}^2 - ೨\text{ತ}(-\text{ದ})\text{ನ} \\ &= (\text{ತ} - \text{ದ} + \text{ನ})\{\text{ತ} + (-\text{ದ}) + \text{ನ} - \text{ತ}(-\text{ದ}) - (-\text{ದ})\text{ನ} - \text{ನತ}\} \\ &= (\text{ತ} - \text{ದ} + \text{ನ})(\text{ತ} + \text{ದ} + \text{ನ} + \text{ತದ} + \text{ದನ} - \text{ನತ}). \end{aligned}$$

ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉವಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಕ ಸಂಕ್ಷೋಚದ ಮೂಲಕ ಕೇವಲ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆದರೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರು ಮೂಲರೀತಿಯನ್ನನುಸರಿಸುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಹಿತಕರವಾದುದು.

ಉ. ೩. ೨೧೬ಯ^೨ - ೬೪ರ^೨ - ೧೨೫ಲ^೨ - ೨೬೦ಯರಲ.

$$= (\text{೬ಯ})^2 + (-\text{೪ರ})^2 + (-\text{೫ಲ})^2 - ೨\cdot ೬ಯ(-\text{೪ರ})(-\text{೫ಲ})$$

$$= (\text{೬ಯ} - ೪ರ - ೫ಲ)$$

$$(\text{೬೬ಯ} + ೧೬ರ + ೨೫ಲ + ೨೪ಯರ - ೨೦ರಲ + ೨೦ಲಯ).$$

ಉ. ೪. ೮೨೨ - ೬೪ಕ^೨ + ೨೪೨ಕ + ೧. ಇಲ್ಲಿ ೮೨೨, - ೬೪ಕ^೨ ಮತ್ತು ೧ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨೨, - ೪ಕ ಮತ್ತು ೧ ಇವುಗಳ ಘನಗಳಿದ್ದು ೨೪೨ಕ = - ೨\cdot ೨೨(- ೪ಕ) \cdot ೧.

$$\therefore \text{ರಾಶಿಯು} = (\text{೨೨})^2 + (-\text{೪ಕ})^2 + (೧)^2 - ೨\cdot ೨೨(- ೪ಕ) \cdot ೧$$

$$= (\text{೨೨} - ೪ಕ + ೧)$$

$$(\text{೪೨೨} + ೧೬ಕ + ೧ + ೮೨ಕ + ೪ಕ - ೨೨)$$

$$= (\text{೨೨} - ೪ಕ + ೧)$$

$$(\text{೪೨೨} + ೮೨ಕ + ೧೬ಕ - ೨೨ + ೪ಕ + ೧).$$

ಉ. ೫. ೨೬೨೬ + ೧೦೨೨ + ೧. ಇಲ್ಲಿ ೧೦೨೨ ದ = ೨೨೨ ಮತ್ತು ೧೦೨೨ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$$\text{ರಾಶಿಯು} = ೨೬೨೬ - ೨೨೨ + ೧ + ೧೦೨೨$$

$$= (\text{೨೬೨೬})^2 + (-\text{೨೨೨})^2 + (೧)^2 - ೨\cdot ೨೬೨೬(-\text{೨೨೨}) \cdot ೧$$

$$= (\text{೨೬೨೬} - ೨೨೨ + ೧)(\text{೨೬೨೬} + ೨೨೨ + ೧ + ೬೨೬ + ೨೨ - ೨೨೨)$$

$$= (\text{೨೬೨೬} - ೨೨೨ + ೧)(\text{೨೬೨೬} + ೬೨೬ + ೨೨ + ೨೨ + ೧).$$

ಉ. ೬. ಯ^೨ - ೬೪ಯ^೨ - ೨೬. ಇಲ್ಲಿ - ೬೪ ರ = ೮ ಮತ್ತು - ೨೪ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$$ರಾಶಿಮು = ಯಃ - \frac{೬೪}{ಯಃ} - ೮ - ೨೪$$

$$\begin{aligned} &= (ಯಃ + (-\frac{೪}{ಯಃ})^2 + (-೨)^2 - ೨ಯಃ(-\frac{೪}{ಯಃ})(-೨) \\ &= (ಯಃ - \frac{೪}{ಯಃ} - ೨) (ಯಃ + \frac{೪}{ಯಃ} + ೪ + ೪ - ೪ + ೨ಯಃ) \\ &= (ಯಃ - ೨ - \frac{೪}{ಯಃ}) (ಯಃ + ೨ಯಃ + ೮ - \frac{೪}{ಯಃ} + \frac{೪೬}{ಯಃ}). \end{aligned}$$

ಉ. ೨. (ಯ + ರ - ಲ)² + (ರ + ಲ - ಯ)² + (ಲ + ಯ - ರ)²
- ೨(ಯ + ರ - ಲ)(ರ + ಲ - ಯ)(ಲ + ಯ - ರ) ಕ್ಕೆ (ಯ + ರ + ಲ)
ದಿವ್ಯ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ಏನು ಬರುವದು ?

$$\begin{aligned} \text{ಭಾಗಾಕಾರ} &= \frac{೧}{೨} \{ (ಯ + ರ - ಲ) + (ರ + ಲ - ಯ) + (ಲ + ಯ - ರ) \} \\ &\times [\{ (ಯ + ರ - ಲ) - (ರ + ಲ - ಯ) \}^2 + \\ &\{ (ರ + ಲ - ಯ) - (ಲ + ಯ - ರ) \}^2 + \\ &+ \{ (ಲ + ಯ - ರ) - (ಯ + ರ - ಲ) \}^2] \\ &= \frac{೧}{೨} (ಯ + ರ + ಲ) \{ (೨ಯ - ೨ಲ)² + (೨ರ - ೨ಯ)² + \\ &\quad (೨ಲ - ೨ರ)² \} \\ &= \frac{೧}{೨} (ಯ + ರ + ಲ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{ ೪(ಯ - ಲ)² + ೪(ರ - ಯ)² + ೪(ಲ - ರ)² \} \\ &= ೨(ಯ + ರ + ಲ) \{ (ಯ - ಲ)² + (ರ - ಯ)² + (ಲ - ರ)² \} \\ &= ೪(ಯ + ರ + ಲ)(ಯ² + ರ² + ಲ² - ಯರ - ರಲ - ಲಯ) \end{aligned}$$

∴ ಭಾಗಾಕಾರ = ೪(ಯ² + ರ² + ಲ² - ಯರ - ರಲ - ಲಯ)

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧೨.

ಗುಣ ಪೈಥಗೋರಸವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

೧. ೩² + ೪² = ೫² + ೩೨ಕಗ. ೨. ೩² - ೫² = ೪² - ೩೨ತದನ.

ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು
ಸಂಗತಿಗಳು

೧.

ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತ

೩.೧. ಮುಂದಿನ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ನಾವು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ
ಅಭ್ಯಸಿಸುವಾ.

ಯ—ಪ(ಅಯಿ + ಕಯಿ + ಗಯ + ಫ) [ಅಯಿ + ಯ(ಅಪ + ಕ)
ಅಯಿ—ಅಪಯಿ + (ಅಪಿ + ಕಪ + ಗ)

(ಅಪ + ಕ)ಯಿ + ಗಯ

(ಅಪ + ಕ)ಯಿ — (ಅಪಿ + ಕಪಿ)

(ಅಪಿ + ಕಪ + ಗ)ಯ + ಫ

(ಅಪಿ + ಕಪ + ಗ)ಯ — (ಅಪಿ + ಕಪಿ + ಗಪ)

ಅಪಿ + ಕಪಿ + ಗಪ + ಫ

ಇಲ್ಲಿ ಭಾಷ್ಯ[ಮೂಲ ರಾಶಿಯು] ಮತ್ತು ಶೇಷ ಇವುಗಳಿಗಿಂತ ಕೋಡಿ-
ವರೆ ನಮಗೆ ಕುಪುಬರುವವೇನೆಂದರೆ ಭಾಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಯೆ ಎಂಬ ಒಂದಾಗಿ ಪ
ಇಷ್ಟರೇ ಯಾವ ರಾಶಿಯು ಬರುವದೋ ಅದೇ ಶೇಷವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಇದರ
ಮೇಲಿಂದ ಹೊರಡುವ ನಿಷ್ಕರ್ಷವೇನೆಂದರೆ ಯ ಇಲ್ಲಿವೆ ಮೇರೆ ಯಾವದೋ
ವರ್ಗದ ಭಿನ್ನ ಘಾತಗಳಿಂದಾದ ರಾಶಿಯನ್ನು ಪ್ರಥಮ ಘಾತದ ಪದದ ಸಹ
ಗುಣಕವಾಗಿ ಇರುವಂಥ ಅದೇ ವರ್ಗದ, ಯ — ಪ ಈ ಸ್ವರೂಪದ. ಪ್ರಥಮ
ಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಶೇಷ ಎಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನೇ ಸಮನೆ
ನೋಡುವದಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸ ಭಾಷ್ಯದಲ್ಲಿ
ಯ ಎ ಬದಲಾಗಿ ಪ ನನ್ನು ಇಷ್ಟರೇ ಶೇಷವನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರಬೇಕು. ಇದರ
ತಾಳೆಯನ್ನು ಮುಂದೆ ಒದಗಿಸಲು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು
ನೋಡುವಾ.

$2\text{ಕ್ಷ}^2 + 2\text{ಕ್ಷ} - ೪\text{ಕ್ಷ} + ೫$ ಇವಕ್ಕೆ $\text{ಕ್ಷ} - ೨$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಶೇಷವು ಸಮಗ್ರ ಜೀಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$$\begin{array}{r} \text{ಕ್ಷ} - ೨ \) \ 2\text{ಕ್ಷ}^2 + 2\text{ಕ್ಷ} - ೪\text{ಕ್ಷ} + ೫ \ (\ 2\text{ಕ್ಷ}^2 + ೧೨\text{ಕ್ಷ} + ೨೫ \\ \underline{2\text{ಕ್ಷ}^2 - ೪\text{ಕ್ಷ}} \\ 6\text{ಕ್ಷ} - ೪\text{ಕ್ಷ} \\ \underline{6\text{ಕ್ಷ} - ೨೪\text{ಕ್ಷ}} \\ 20\text{ಕ್ಷ} + ೫ \\ \underline{20\text{ಕ್ಷ} - ೧೦೫} \\ ೧೧೦ \end{array}$$

ಈಗ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ ದ ಬದಲಾಗಿ ೨ ಇಟ್ಟರೆ ಭಾಜ್ಯದ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಾಗುವುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$\text{ಕ್ಷ} = ೨ \text{ ಇದ್ದರೆ ಭಾಜ್ಯವು} = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 5$$

$= 8 + 4 - 8 + 5 = ೧೦$. ಬೇರೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಇದೇ ಶೇಷ ಬಂದಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

೩.೨. ಈಗ ಇದು ಒಗೆಗೆ ಏಕೆ ಅಗುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಸಮಗ್ರ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ.

ಭಾಜಕ) ಭಾಜ್ಯ (ಭಾಗಾಕಾರ

.....

ಶೇಷ

ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ \times ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ. ಇದೊಂದು ನಿತ್ಯಸಮ ವಿರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $2\text{ಕ್ಷ}^2 + 2\text{ಕ್ಷ} - 4\text{ಕ್ಷ} + 5 = (\text{ಕ್ಷ} - 2) \times \text{ಭಾಗಾಕಾರ} + \text{ಶೇಷ}$. ಕ್ಷ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದರೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಸಿದ್ಧವಿರುತ್ತದೆ. ಕ್ಷ ದ ಬೆಲೆಯು ೨ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. $2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 5 = (2 - 2) \times \text{ಭಾಗಾಕಾರ} + \text{ಶೇಷ} = 0 \times \text{ಭಾಗಾಕಾರ} + \text{ಶೇಷ}$.

$$\therefore \text{ಶೇಷ} = ೨ \cdot ೩ + ೭ \cdot ೩ - ೪ \cdot ೩ + ೫ \\ = ೫ + ೨೩ - ೧೨ + ೫ = ೧೧.$$

ಇದರಂತೆಯೇ ನೊಟ್ಟನೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಅಯ^೩ + ಕಯ^೩ + ಗಯ + ಘ = (ಯ - ಪ) × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ. ಯ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದರೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನಿಜವಿರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಇಟ್ಟರೆ,
 ಅಪ^೩ + ಕಪ^೩ + ಗಪ + ಘ = (ಪ - ಪ) × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ
 = ೦ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ = ಶೇಷ.

ಈ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು.

ಯ ದ (ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ವರ್ಣದ) ಘಾತಗಳಿಂದಾದ ಬೇಕಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ವನ್ನು ಇಟ್ಟು ದೊರಕಿದ ಬೆಲೆಯೇ ಯ-ಪ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಶೇಷವಿರುವದು. ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಇದರ ಉಪಯೋಗದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಅನುವಾಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ. ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡದೇ ಶೇಷವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮೇಳೆ ಮತ್ತು ಉತ್ಸಾಹವಿದ್ದರೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಿಸಿ ತಾಳೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಉ. ೧. ೫ಕ್ಷ^೩ - ೪ಕ್ಷ^೩ + ೨ಕ್ಷ - ೧ ಇದನ್ನು ೬ - ೪ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವೆಷ್ಟು ?

$$\text{ಶೇಷ} = ೫ \cdot ೪ + ೪ \cdot ೪ + ೨ \cdot ೪ - ೧ = ೩೬ - ೬೪ + ೮ - ೧ = ೨೬.$$

ಉ. ೨. ೩ಕ್ಷ^೩ + ೨ಕ್ಷ^೩ - ೫ಕ್ಷ - ೬ ಇದನ್ನು ೬ + ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವೆಷ್ಟು? ಇಲ್ಲಿ ಭಾಜಕ = ೬ + ೨ಕ್ಷ - (೨). ಅದುದರಿಂದ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ೬ ದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ -೨ನ್ನು ಇಡಬೇಕು.

$$\therefore \text{ಶೇಷ} = ೩(-೨)^೩ + ೨(-೨)^೨ - ೫(-೨) - ೬ = -೨೪ + ೮ + ೧೦ - ೬ = -೧೨.$$

ಇಲ್ಲಿ ೬ ದ ಬದಲಾಗಿ -೨ನ್ನು ಏಕೆ ಇಡಲಿಕ್ಕೆಬೇಕು ಎಂಬುದು ಮುಂದಿನ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ೩ಕ್ಷ^೩ + ೨ಕ್ಷ^೩ - ೫ಕ್ಷ - ೬

$= (ಕ್ಷ+೨) \times$ ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ. ಈಗ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $ಕ್ಷ+೨ = ೦$ ಇದ್ದಾಗ ಅಂದರೆ $ಕ್ಷ = -೨$ ಇರುವಾಗ ಮಾತ್ರ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ $(ಕ್ಷ+೨) \times$ ಭಾಗಾಕಾರ ಈ ಭಾಗವು ಇಲ್ಲದ ಹಾಗೆ ಆಗಿ ಅಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಮಾತ್ರ ಉಳಿಯುವದು. ಆ ಮೇಲೆ ಶೇಷವು $೩(-೨)^೩ + ೨(-೨)^೨ - ೫(-೨) - ೬$ ಇರುವದು.

ಆದುದರಿಂದ ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕ ಮುಖ್ಯ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಭಾಜಕ ರಾಶಿಯು ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಅವಮೋಳಗಿನ ವರ್ಗದ ಯಾವ ಬೆಲೆಯು ಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ಆ ವರ್ಗದ ಬದಲಾಗಿ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡುವದು.

ಉ. ೩. $೨ನಿ - ೧ನಿ + ೨ನಿ + ೪ನಿ + ೩$ ಇದನ್ನು $ನ+೩$ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವೆಷ್ಟು?

$$\begin{aligned} \text{ಶೇಷ} &= ೨(-೩)^೪(-೩)^೩ + ೨(-೩)^೨ + ೪(-೩) + ೩ \\ &= ೧೬೨ + ೨೭ + ೧೨ - ೧೨ + ೩ = ೧೯೨. \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧೩.

ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಶೇಷವೆಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧. $೪ಆ - ೫ಆ - ೭ಆ + ೩$ ಭಾಗಲೆ $ಆ-೨$.
೨. $೩ಆ - ೨ಆ + ೪ಆ - ೫$ ಭಾಗಲೆ $ಆ+೨$.
೩. $೮ಕ್ಷ - ೪ಕ್ಷ + ೩ಕ್ಷ - ೭$ ಭಾಗಲೆ $ಕ್ಷ+೩$.
೪. $೯ಯ - ೨ಯ + ೩ಯ + ೪$ ಭಾಗಲೆ $ಯ-೩$.
೫. $೬ಕ್ಷ - ೭ಕ್ಷ - ೬ಕ್ಷ + ೫ಕ್ಷ - ೧$ ಭಾಗಲೆ $ಕ್ಷ-೪$.
೬. $೫ಯ - ೪ಯ + ೬ಯ + ೨$ ಭಾಗಲೆ $ಯ-೨$.
೭. $೮ವ - ೨ವ + ೫ವ - ೧೮$ ಭಾಗಲೆ $ವ+೪$.
೮. $೭ಕ್ಷ + ೪ಕ್ಷ - ೨ಕ್ಷ + ೩$ ಭಾಗಲೆ $ಕ್ಷ+೨$.
೯. $೮ರ + ೨ರ - ೪ರ - ೧$ ಭಾಗಲೆ $ರ-೫$.
೧೦. $೨ಆ - ೨ - ೧೦ಆ + ೩$ ಭಾಗಲೆ $ಆ+೫$.

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

೨.

ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತ

೩.೨. ಮೇಲೆ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವೇನಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಈಗ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ.

ಯೌ—೧೦ಯೌ+೨೧ಯ—೨೦ ಇದನ್ನು ಯ—೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವೆಷ್ಟು? ಶೇಷ=ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ೨ ಹಿಡಿದು ಬರುವ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು=೨೪—೧೦=೨೪+೨೧೦=೨೩೦=೪—೪೦+೬೨—೨೦=೦ ಶೇಷವು ಏನೂ ಇಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ರಾಶಿಗೆ ಯ—೨ ರಿಂದ ಶೇಷವಿಲ್ಲದೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು, ಅಂದರೆಯೇ ಯ—೨ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದು, ೨ ರಿಂದ ಗುಣಕ್ಕೆ ನೀಶೇಷ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು, ೨ ಇದು ಗುಣ ರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದರಿಂದ ಇದರ ಅರ್ಥವು, ವಿರುದ್ಧ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಗುಣಕ್ಕೆ ನೀಶೇಷ ವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ, ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು ಉಳಿಯುವದು, ಇದರ ಅರ್ಥವೇನಿರುವದೆ, ೪ ಇದು ಗುಣ ರ ಗುಣಕವಲ್ಲ, ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಏಕಕಾಂತ ದ್ವಿಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಬರುವದು, ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದರಿಂದ ಯ—೨ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆ ಎಂದು ಸಂಶ್ಲೇಷವಿಲ್ಲದೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದು, ವಿರುದ್ಧ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಯ—೬ ಇದು ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆಯೋ ಎಂದು ಕೇಳಿದರೆ ಯ=೬ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು=೬೪-೧೦೬೨+೨೧೦೬ ೨೦ ೨೧೬-೨೬೦+೧೦೬-೨೦=೧೨ ಇರುವದರಿಂದ ರಾಶಿಗೆ ಯ=೬ ರಿಂದ ನೀಶೇಷ ವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ, ಅಂದರೆ ಆದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಲ್ಲ ಎಂದು ಸಹ ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

೩.೪. ಒಂದು ಗುಣಕವು ತಿಳಿದರೆ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೇಳುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುವದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಯ—೨ ಇದು ಒಂದು ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಕಾರಣ ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷಗುಣಕಾಂಶ ನೊಂದನೆಯ ಗುಣಕವು ಯ—೨ ಬರುವಂತೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೧—೧೦೦೦ + ೩೦೦ — ೩೦

= ೧೦೦ — ೨೦೦ — ೨೦೦ + ೧೦೦ + ೧೦೦ — ೩೦

= ೧೦೦(೧೦ — ೨) — ೨೦೦(೧೦ — ೨) + ೧೦೦(೧೦ — ೨)

= (೧೦ — ೨)(೧೦೦ — ೨೦೦ + ೧೦೦)

= (೧೦ — ೨)(೧೦ — ೨)(೧೦ — ೨).

ಪ್ರ. ೫. ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದೇನೆಂದರೆ ಯ ದ (ಇಲ್ಲವೇ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಣದ) ಬೇರೆಬೇರೆ ಘಾತಕಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಇಟ್ಟು ಅದರ ಜೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಯ — ಪ ದಿಂದ ನೀಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವೋಗುವದು, ಅಂದರೆಯೇ ಯ ಪ ಇದು ಅದರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದು.

ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಿದೆ.

ಉ. ೧. ೨೦೦ — ೧೦೦೦ + ೨೦೦ + ೧೦೦ ಇದರ ಸ್ವ — ೩ ಇದು ಗುಣಕವಿರುವದೋ? ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಯ ಬೇರೆ ಗುಣಕಗಳಾವವು ?

ಇದು ಬದಲಾಗಿ ಪ ಇಟ್ಟರೆ,

ರಾಶಿಯು = ೨೦೦ — ೧೦೦೦ + ೨೦೦ + ೧೦೦ = ೧೦೦ — ೮೦೦ + ೨೦೦ + ೧೦೦

= ೦, ಇದುವರಿಂದ ಸ್ವ — ೩ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದ್ದರೇವೋ.

ಇಷ್ಟು ಆದ ಮೇಲೆ ಸ್ವ — ೩ ಈ ಮೂವರನ್ನೇ ಗುಣಕ ಬರುವಂತೆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಾರಿ. ಆದರೆ ಇವು ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

೨೦೦ — ೧೦೦೦ + ೨೦೦ + ೧೦೦

= ೨೦೦ — ೨೦೦ — ೧೦೦ + ೨೦೦ — ೧೦೦ + ೧೦೦

= ೨೦೦(೧ — ೨) — ೧೦೦(೧ — ೨) — ೧೦(೧ — ೨)

= (೧ — ೨)(೨೦೦ — ೧೦೦ — ೧೦)

= (೧ — ೨)(೧ — ೧)(೨೦ + ೧).

ಉ. ೨. ೧೦ + ೧೦ — ೧೦೦ ೩೦ ಇದರಲ್ಲಿ ೧೦ + ೨ ಗುಣಕವಿರುವದೋ? ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ೧೦ + ೨ ಇದರ ಗುಣಕವಾಗುವವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಗುಣ ಪೃಥಕ್ ರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ.

ಕ್ಷದ ಬದಲಾಗಿ —೨ ಇಟ್ಟರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು $= (-೨^೩) + (-೨)^೩ - ೧೪(-೨) - ೩೦ = -೮ + ೪ + ೨೮ - ೩೦ = -೬$ ಅಂದರೆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕ್ಷ+೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು -೬ ಉಳಿಯುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಕ್ಷ+೨ ಇದು ಅದರ ಗುಣಕವಲ್ಲ, ಆದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೬ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಅಂದರೆ ಕ್ಷ+೨ ಇದು ಗುಣಕವಿರಬೇಕಾದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ೬ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ

$$\begin{aligned} \text{ಕ್ಷ}^೩ + ೨\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೪\text{ಕ್ಷ} - ೩೦ + ೬ &= \text{ಕ್ಷ}^೩ + \text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೪\text{ಕ್ಷ} - ೨೪ \\ &= \text{ಕ್ಷ}^೩ + ೨\text{ಕ್ಷ}^೨ - \text{ಕ್ಷ}^೨ - ೨\text{ಕ್ಷ} - ೧೨\text{ಕ್ಷ} - ೨೪ \\ &= \text{ಕ್ಷ}^೩ (\text{ಕ್ಷ} + ೨) - \text{ಕ್ಷ}^೨ (\text{ಕ್ಷ} + ೨) - ೧೨(\text{ಕ್ಷ} + ೨) \\ &= (\text{ಕ್ಷ} + ೨)(\text{ಕ್ಷ}^೩ - \text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೨) \\ &= (\text{ಕ್ಷ} + ೨)(\text{ಕ್ಷ} + ೨)(\text{ಕ್ಷ} + ೪). \end{aligned}$$

ಉ. ೩ ಯ^೩ - ೭ಯ + ಕ ಇದರಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಯ - ೨ ರಿಂದ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು ?

ರಾಶಿಯನ್ನು ಯ - ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಶೇಷವು $= ೨ - ೭.೨ + ಕ = ೪ - ೧೪ + ಕ = -೧೦ + ಕ$. ಕ ದ ಬೆಲೆಯು ೧೦ ಇದ್ದರೆ ಈ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯವಿರುವದು, ಅಂದರೆ ಯ - ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವದು.

[ತಾಳೆ: ಯ^೩ - ೭ಯ + ೧೦ = (ಯ - ೨)(ಯ - ೫) .]

ಉ. ೪. ಆ ಮತ್ತು ಕ ಇವುಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಇದ್ದರೆ ೨ಯ^೩ - ೧೧ಯ^೨ + ೭ಯ + ಕ ಕ್ಕಿ ಯ - ೩ ಮತ್ತು ಯ - ೪ ಈ ಎರಡರಿಂದಲೂ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು ?

ಯ - ೩ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಶೇಷವು $= ೨.೩^೩ - ೧೧.೩^೨ + ೭.೩ + ಕ = ೫೪ - ೯೯ + ೩.೩ + ಕ = ೩.೩ + ಕ - ೪೫$.

ಯ - ೪ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು $= ೨.೪^೩ - ೧೧.೪^೨ + ೭.೪ + ಕ = ೧೨೮ - ೧೭೬ + ೪.೪ + ಕ = ೪.೪ + ಕ - ೪೮$.

∴ ಯ - ೩ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ೩.೩ + ಕ - ೪೫ = ೦, ಅಂದರೆ ೩.೩ + ಕ = ೪೫. (೧)

ಮತ್ತು ಯ - ೪ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ೪.೪ + ಕ - ೪೮ = ೦ ಅಂದರೆ

೪೮ + ೯ = ೪೮, (೨) ಇರಲೇಬೇಕು. ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ
 ಅ = ೩ ಮತ್ತು ಕ = ೬ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಗೆ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಹೋಗುವ
 ದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೧೪.

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ನೋಡಲನೆಯ
 ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯು ಗುಣಕವಿರುವದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು
 ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಇದ್ದರೆ ನೋಡಲನೆಯ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ-
 ವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಮತ್ತು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು
 ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅದು ಗುಣಕವಿರುವದು ಎಂಬುದನ್ನು
 ಹೇಳಿರಿ. ತರುವಾಯ ದೊಸ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. ಯ^೩—೮ಯ^೨—೪ಯ + ೮; ಯ + ೨.
೨. ೪ವ^೩—೧೬ವ^೨ + ೯ವ + ೯; ವ—೩.
೩. ೩ಕ್ಷ^೩—೧೬ಕ್ಷ^೨ + ೨೩ಕ್ಷ—೬; ಕ್ಷ—೩.
೪. ವ^೩—೩ವ^೨—೩೪ವ + ೧೦೦; ವ—೪.
೫. ಯ^೩ + ೫ಯ^೨—೨ಯ—೨೦; ಯ + ೪.
೬. ೪ರ^೩—೮ರ^೨—೫ರ—೪೦; ರ—೫.
೭. ೫ಕ್ಷ^೩ + ೨೭ಕ್ಷ^೨ + ೯ ಕ್ಕೈ ಕ್ಷ—೮ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ಕ = ?
೮. ೧೦ಯ^೩—೨೧ಯ^೨ + ೮ಯ + ೪ ಕೈ ಯ—೨ ರಿಂದ ಭಾಗ
 ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ಅ = ?
೯. ೩ನ^೩—೮ನ^೨ + ೮ನ + ೯ ಕೈ ನ + ೪ ಮತ್ತು ನ—೭ ರಿಂದ ಭಾಗ
 ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ ಅ = ? ಕ = ?
೧೦. ೭ಕ್ಷ^೩ + ೬ಕ್ಷ^೨—೪೦ಕ್ಷ^೨ + ೮ಕ್ಷ + ೯ ಕೈ ಕ್ಷ—೨, ಕ್ಷ + ೩ ರಿಂದ
 ಭಾಗಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?
೧೧. ಪ^೩ + ೮ಪ^೨—೪೯ಪ^೨ + ೯ಪ + ೬೦ ಕೈ ಪ—೪, ಪ—೫ ರಿಂದ
 ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?
೧೨. ೮ಯ^೩ + ೪ಯ^೩ + ೯ಯ^೨ + ೩೨ಯ—೧೫ಕೈ ಯ—೧,
 ಯ + ೫ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?

೩.

ಕೆಲವು ಗುಣಕ ನಿಯಮಗಳು ಮತ್ತು ಒಹುಪದಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ
 $\dots \dots = (ಯ - ೧)(\dots)$; $\dots \dots = (ಯ + ೧)(\dots)$: $= \dots (\dots)$

೩.೬. ಮೇಲೆ ವಿವೇಚಿಸಿದ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೇಲಿಂದ ಗುಣಕ-
 ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಮಗ್ರ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಲು ಬರುವುದು. ಅವು
 ಹೀಗೆ ಎಂದರೆ ಅಯಿ + ಕಯಿ + ಖಯಿ + ಗಯಿ + ಘ ವಂಘ ಯಾವು -
 ದಾದರೊಂದು ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ ಯ-ಪ ಈ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ, ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ವ
 ಬದಲಾಗಿ ಸ ಉಳ್ಳ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರಬೇಕು.
 ಅವರಂತೆಯೇ ಯ-೧ ಈ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಯ=೧ ಎಂದು ತಿಳಿದು
 ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರಬೇಕು. ಈಗ ಯ=೧ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ
 ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅ + ಕ + ಖ + ಗ + ಘ ಆಗುವುದು. ಅದುವರಿಂದ ಅ +
 ಕ + ಖ + ಗ + ಘ = ೦ ಇದ್ದರೆ ಯ = ೧ ಇದು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವುದು.
 ಮತ್ತು ಅ, ಕ, ಖ, ಗ, ಘ ಇವು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ವ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು.
 (ಘ ಅಂದರೆ ಘಯ, ಅಂದರೆ ಘ ಇದು ಯ ವ ಸಹ ಗುಣಕವಿರುವುದು
 ತಿಳಿಯಬಹುದು.) ಅದುವರಿಂದ,

ಯ ವ (ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವಸ್ತುವು) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತ-

ಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ವ ಸಲ್ಲಿ

ನಿಯಮ ೧.

ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು

ಶೂನ್ಯವಿದ್ದರೆ ಯ = ೧ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕ-

ವಿರುವುದು, ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ಇರುವದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಲಕ್ಷ್ಯ-ಒಕ್ಷ-ಒಕ್ಷ+೨೧ ಇದರಲ್ಲಿ ಲ-೬-೨೨
 +೨೧=೦, ಅದುವರಿಂದ ಲ್ಲ-೧ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವು ಇದ್ದಿರ-
 ಲಿರಬೇಕು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ-
 ಕ್ಷಾಂ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವುದು.

ಲಕ್ಷ್ಯ-ಒಕ್ಷ-ಒಕ್ಷ+೨೧

= ಲಕ್ಷ್ಯ-ಲಕ್ಷ್ಯ+ಒಕ್ಷ-ಒಕ್ಷ-೨೧ಕ್ಷ+೨೧

= ಲಕ್ಷ್ಯ(ಕ್ಷ-೧)+ಒಕ್ಷ(ಕ್ಷ-೧)-೨೧(ಕ್ಷ-೧)

$$= (\kappa - 1)(\alpha\kappa + \alpha\kappa - 1)$$

$$= (\kappa - 1)(\alpha\kappa - 1)(\alpha\kappa + 1).$$

೩. ೨. ಈಗ $\alpha\kappa + \kappa\alpha + \alpha\alpha + \kappa\kappa + \alpha\kappa$ ಇವರಲ್ಲಿ $\alpha\kappa + \kappa\alpha$ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅವರ ಜೊತೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವದು ; ಮತ್ತು $\alpha\alpha$ ಬದಲಾಗಿ ೧ ಇಟ್ಟರೆ ರಾಶಿಯ ಜೊತೆಯು $\alpha(-1)^2 + \kappa(-1)^2 + \alpha(-1)^2 + \kappa(-1)^2 + \alpha\kappa$ ಆದರೆ $\alpha - \kappa + \alpha - \kappa + \alpha\kappa = 0$. ಆದರಂತೆಯೇ $\alpha\kappa + \kappa\alpha$ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ, $\alpha - \kappa + \alpha - \kappa + \alpha\kappa = 0$. ಆದರೆ $\alpha + \kappa + \alpha\kappa = \kappa + \alpha$.

ಇಲ್ಲಿ α, κ ಗಳು ಇವು ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿದ್ದು, ಈಗ ಇವು ಬಿಡುವು ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ಇವರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ನಿರ್ಧಾರವು ಹೊರಹಿಡಿಯಿತು.

ಯದ (ಇಲ್ಲಿವೇ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಣದ) ಬೇರೆ ಬೇರೆ

ನಿಯಮ ೨. ಘಾತಕಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು

ಮತ್ತು ವಿಷಮ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ಇವು ಸಮಾನವಿದ್ದರೆ $\alpha + \kappa$ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಇರದಿದ್ದರೆ ಅದು ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆಗಾಗಿ,

$\alpha\kappa + \kappa\alpha + \alpha\kappa - 1$ ಇವರಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು ೧, ೨, ೩, ಮತ್ತು ಬಿಡುವು ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು $= 1 + 1 = 2$ ಇರುವುದರಿಂದ $\kappa + 1$ ಇದು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿದ್ದಿರಬೇಕು. ಇದು ತಿಳಿದುಹೋದಂತೆಯೇ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

$$\alpha\kappa + \kappa\alpha + \alpha\kappa - 1$$

$$= \alpha\kappa + \alpha\kappa + \alpha\kappa + \alpha\kappa - 1$$

$$= \alpha\kappa(\kappa + 1) + \alpha\kappa(\kappa + 1) - 1(\kappa + 1)$$

$$= (\kappa + 1)(\alpha\kappa + \alpha\kappa - 1)$$

$$= (\kappa + 1)(\alpha\kappa - 1)(\alpha\kappa + 1).$$

೩.೮. ಆಯಃ + ಕಯಃ + ಖಯಃ + ಗಯಃ + ಘಃ ಈ ರಾಶಿಯ ನಯ + ಪ ಈ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಯ ದ ಯಾವುವೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದರೂ ಅದು ಅವರ ಗುಣಕವಿರುವದು. ಯ ದ ಬೆಲೆಯು ೧ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಆಯಃ + ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅ + ಕ + ಖ + ಗ + ಘ ಅಂದರೆ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುವದು. ಮತ್ತು ನಯ + ಪ ದ ಬೆಲೆಯು ನ + ಪ ಇರುವದು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವಜೇನೆಂದರೆ, ನಯ + ಪ ದಂತಹ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪುರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಆಯಃ + ಕಯಃ + ಖಯಃ + ಗಯಃ + ಘಃ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿರಬೇಕಾದರೆ ನ + ಪ ಇದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಗುಣಕವಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆಯೇ ಆ ಬೇರೀಜಿಗೆ (ಅ + ಕ + ಖ + ಗ + ಘ ಕೈ)ನ + ಪ ದಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಇದ್ದರೆಯೇ ನಯ + ಪ ಈ ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಬಂಧವು. ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಅದುದರಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಮಹತ್ವದ ನಿಯಮವು ಯಾವುದೆಂದರೆ ಯ ದ (ಇಲ್ಲವೇ ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ವರ್ಗದ) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ನಯ + ಪ ದಂತಹ ಯಾವ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯಲ್ಲಿಯ

ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗು-

[ನಿಯಮ ೩.] ವದೋ ಅದೇ ದ್ವಿಪದಿಯು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಬಂಧವು, ಬೇರೆ ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲ.

ಗುಣಪೃಥಕ್ಪುರಣಕ್ಕಾಗಿ ಈ ನಿಯಮವು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡುವಾ.

ಉ.೧. ಯಃ + ಖಯಃ — ೨ಯಃ — ೨ಖ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪುರಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು $\neq ೦$, ಅದುದರಿಂದ ಯ — ೧ ಇದು ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು \neq ವಿವಿಧ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅದುದರಿಂದ ಯ + ೧ ಇದಾದರೂ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಪದ ೨ಖ ಇದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಅವಯವಗಳು ೨, ೩, ೪....ಇರುವವು. ಅದುದರಿಂದ ರಾಶಿಯ ಯ + ೨, ಯ — ೨, ಯ + ೩, ಯ — ೩, ಯ + ೪, ಯ — ೪ ಹೀಗೆ ಅವಯವಗಳು

ಸಂಭವಿಸುವವು. ಈಗ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪರಿಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಾಡುವಾ.

ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಕ ಬೇರೀಜು — ೨೦ ಇರುತ್ತದೆ. ಯ+೨ ರಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಕ ಬೇರೀಜು ೩-೨೦ ಕ್ಕೆ ೩ ರಿಂದ ಭಾಗ-ಹೋಗುವದಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಯ+೨ ಇದು ಅನಯವನಿರಲಾರದು.

ಯ-೨ ರಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು—೧ ಇದು ಗುಣಕವಿರುವದು ಸಂಭಂಧವಿದೆ. ಇದ್ದರೆ ಯ=೨ ಹಿಡಿದು ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರಬೇಕು. ಅದು ಇದೆಯೇ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಯ=೨ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು=೨^೨+೫.೨^೨-೨.೨-೨೪=೮+೨೦-೪-೨೪=೦. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಯ-೨ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಗುಣಕವು ಯ+೩ ಇರಬಹುದೆ? ಇಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಕ ಬೇರೀಜು ೪. ೪ರಿಂದ—೨೦ಕ್ಕೆ ಭಾಗಹೋಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಯ+೩ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಇದ್ದರೆ ಯ = -೩ ಎಂದು ಹಿಡಿದು ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಅದು ಆಗುತ್ತದೆಯೇ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಯ=-೩ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು = (-೩)^೨+೫(-೩)^೨-೨(-೩)-೨೪=-೨೭+೪೫+೬-೨೪=೦. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಯ+೩ ಇದೊಂದು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿದೆ.

ಈಗ ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಘಾತವಿದ್ದುದರಿಂದ ಯ-೫ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಮೂರೇ ಗುಣಕಗಳಿರುವದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಗುಣಕ ಯ-೨ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ಯ+೩ ಇದ್ದು ರಾಶಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಯ^೩ ಇದ್ದು ಕೊನೆಯದು-೨೪ ಇರುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳಿಂದ ಮೂರನೆಯದು ಯ+೪ ಇದೇ ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಇದರ ಹೊರತು ಬೇರೆ ಇರಲಾರದು. ಅದೇ ಇದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಪಾತ್ರಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ=-೪ ಹಾಕಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತದೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಯ = -೪ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು = (-೪)^೨+೫(-೪)^೨-೨(-೪)
-೨೪=-೬೪+೮೦+೮-೨೪=೦.

$$\therefore \text{ಯ}^4 + \text{ಉಯ}^3 - ೨\text{ಯ}^2 - ೨\text{ಉ} = (\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} + ೪).$$

ಮೇಲಿನ ಮಾದರಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವು ತಿಳಿದನಂತರ ಮೇಲಿನಂತೆ ದೀರ್ಘಪಾದ ಮತ್ತು ಮೇಳೆಯು ಬದಲೆ ತಗಲುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸದೇ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬಿಡಿಸುವದು ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲವೂ, ಸುಲಭವೂ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಯ ೨ ಇಮ್ಮೊಂದು ಗುಣಕವಿದೆ, ಎಂದು ತಿಳಿದ ಕರುಣಾಯ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned} & \text{ಯ}^4 + \text{ಉಯ}^3 - ೨\text{ಯ}^2 - ೨\text{ಉ} \\ &= \text{ಯ}^4 - ೨\text{ಯ}^2 + ೨\text{ಯ}^2 - ೧೪\text{ಯ} + ೧೨\text{ಯ} - ೨ಉ \\ &= \text{ಯ}^2(\text{ಯ} - ೨) + ೨\text{ಯ}(\text{ಯ} - ೨) + ೨\text{ಯ}(\text{ಯ} - ೨) \\ & \quad + ೧೨(\text{ಯ} - ೨) \\ &= (\text{ಯ} - ೨)(\text{ಯ}^2 + ೨\text{ಯ} + ೧೨) \end{aligned}$$

[ಈ ವ್ಯಕ್ತಿಸದಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿದುದರಿಂದ ಹೇಳಲು ಬರುವದು]

$$= (\text{ಯ} - ೨)(\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} + ೬).$$

ಉ.೨. $೬x^4 - ೫x^3 - ೨೪x^2 - ೪x + ೧೨$ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ಗುಣವೃದ್ಧಕೃತರಣಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೀರ್ಣೀಕರಣ, ಅದುದರಿಂದ $x^2 - ೧$ ಇದು ಗುಣಕವಿಲ್ಲ.

ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೀರ್ಣೀಕರಣ (-೨೧) ಫಲಿತವು ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೀರ್ಣೀಕರಣ (-೪) . ಅದುವರಿಂದ $x^2 + ೧$ ಇದು ಗುಣಕವಿಲ್ಲ.

ಈಗ ಸಂಭವನೀಯ ಗುಣಕಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದೊಂದುರ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಮಾಡುವಾ. $x^2 + ೨$ ಇರುವುದೇ? ಇದರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೀರ್ಣೀಕರಣ .. ರಾಶಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೃಹತ್ ಜೀರ್ಣೀಕರಣ—೨೦, ಇದಕ್ಕೆ ೩ ರಿಂದ ರಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದರಮೇಲೆ $x^2 + ೨$ ಇದು ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. $x^2 - ೨$ ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಜೀರ್ಣೀಕರಣ ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$\begin{aligned} \text{ಕ್ಷ} &= -೨ \text{ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು} \\ &= ೬(-೨)^೩ - ೩೯(-೨) - ೪(-೨) + ೧೩ \\ &= ೯೬ + ೪೦ - ೧೧೬ + ೮ + ೧೩ = ೦. \end{aligned}$$

ಅದುವರಿಂದ $\text{ಕ್ಷ}+೨$ ಇವೊಂದು ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತ. ಇದರಿಂದಲೇ ಮುಂದೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $\text{ಕ್ಷ}-೨$, $\text{ಕ್ಷ}+೩$, $\text{ಕ್ಷ}-೩$ ಇವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದರೆ $\text{ಕ್ಷ}-೨$ ಮತ್ತು $\text{ಕ್ಷ}+೩$ ಇವು ಗುಣಕಗಳೆರಬೇ $\text{ಕ್ಷ}-೩$ ಇದು ಇರುವದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ರಾಶಿಯು

$$\begin{aligned} &= ೬\text{ಕ್ಷ}^೩ + ೧೨\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೭\text{ಕ್ಷ} - ೨೪\text{ಕ್ಷ} - ೫\text{ಕ್ಷ} - ೧೦ + ೬\text{ಕ್ಷ} + ೧೨ \\ &= ೬\text{ಕ್ಷ}^೩(\text{ಕ್ಷ}+೨) - ೧೭\text{ಕ್ಷ}^೨(\text{ಕ್ಷ}+೨) - ೨೯\text{ಕ್ಷ}(\text{ಕ್ಷ}+೨) + ೬(\text{ಕ್ಷ}+೨) \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)(೬\text{ಕ್ಷ}^೩ - ೧೭\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೨೯\text{ಕ್ಷ} + ೬) \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)(೬\text{ಕ್ಷ}^೩ - ೧೭\text{ಕ್ಷ}^೨ + \text{ಕ್ಷ}^೨ - ೩\text{ಕ್ಷ} - ೩\text{ಕ್ಷ} + ೬) \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)(೬\text{ಕ್ಷ}^೩(\text{ಕ್ಷ}-೨) + \text{ಕ್ಷ}^೨(\text{ಕ್ಷ}-೨) - ೩(\text{ಕ್ಷ}-೨)) \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)(\text{ಕ್ಷ}-೨)(೬\text{ಕ್ಷ}^೩ + \text{ಕ್ಷ} - ೨) \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)(\text{ಕ್ಷ}-೨)(೨\text{ಕ್ಷ}-೧)(೩\text{ಕ್ಷ}+೨). \end{aligned}$$

ಉ.೩. $೬\text{ಕ್ಷ}^೩ + ೧೨\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೭\text{ಕ್ಷ} + ೨೪\text{ಕ್ಷ} + ೫\text{ಕ್ಷ} + ೧೦$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ= ?, ಕ= ?.

$\text{ಕ್ಷ}+೩$ ರಿಂದ $೬\text{ಕ್ಷ}^೩ + ೧೨\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೭\text{ಕ್ಷ} + ೨೪\text{ಕ್ಷ} + ೫\text{ಕ್ಷ} + ೧೦$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ $\text{ಕ್ಷ}-೨$ ರಿಂದಾವರೂ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕು. ಮತ್ತು $\text{ಕ್ಷ}+೪$ ರಿಂದಲೂ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕು. ಈಗ $\text{ಕ್ಷ}-೨$ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುವರಿಂದ $\text{ಕ್ಷ}=೨$ ಇದ್ದರೆಯೇ ರಾಶಿಯು=೦.

$$\therefore ೬\text{ಕ್ಷ}^೩ + ೧೨\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೭\text{ಕ್ಷ} + ೨೪\text{ಕ್ಷ} + ೫\text{ಕ್ಷ} + ೧೦ = ೦$$

$$\therefore ೪೮೬ + ೧೨೯ - ೬೫೬ + ೨೪೮ + ೫೮ + ೧೦ = ೦$$

$$\therefore ೧೦ + ೨೪ + ೧೦ = ೦$$

$$\therefore ೨೪ + ೧೦ = -೧೦ \dots \dots \dots (೧)$$

ಹದರಿಂದಲೇ $\text{ಕ್ಷ}+೪$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ, ಅದುವರಿಂದ $\text{ಕ್ಷ} = -೪$ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು=೦

$$\therefore ೬(-೪)^೩ + ೧೨(-೪)^೨ - ೧೭(-೪) - ೨೪(-೪) - ೫(-೪) + ೧೦ = ೦$$

∴ ೧೫೩ - ೪೪೦ - ೧೧೬೮ - ೪೮ + ಕ = ೦

∴ - ೮೦ - ೪೮ + ಕ = ೦

∴ ೪೮ - ಕ = - ೮೦ (೨)

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ೩೮ = - ೮೦, ಅಂದರೆ ೮ = - ೧೪, ಮತ್ತು ಅದುದರಿಂದ ಕ = ೨೪.

೮ = - ೧೪, ಕ = ೨೪.

೩.೯. ಎಲ್ಲ ಪದಗಳು ಏಕಚಿಹ್ನೆವಿರುವ $೬ಯ + ೨೨ಯ + ೨೨ಯ + ೨೨ಯ + ೧೨$ ದಂತಹ ಸ್ವರೂಪದ ಯಾವು ಸೇ ರಾತಿಯ ಗುಣಕವು ಅಯ = ಪ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಚಿಹ್ನೆ ಚಿಹ್ನೆ (ಒಂದರ ಚಿಹ್ನೆ + ಬೇರೊಂದರ -) ಪದಗಳಿರುವ ದ್ವಿಪದಿಯು ಇರಲಾರದು; ಆದು ಅಯ + ಗ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಏಕಚಿಹ್ನೆ ಪದಗಳೇ ಇರುವದು. ಏಕೆಂದರೆ ಅಯ = ಪ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅಯ = ಪ, ಅಂದರೆ ಯ = ಪ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾತಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಆದರೆ ಯ ದ ಬೆಲೆಯು ಧನ (+) ಇದ್ದರೆ ಮೇಲಿನ ಸ್ವರೂಪದ ರಾತಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅವರೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದ ಬೆಲೆಯು ಧನವಿರುವದರಿಂದ, ಎಂದಿಗೂ ಶೂನ್ಯವಿರಲಾರದು, ಆದರೆ ಆದು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಇರುವದು. ಕೊಟ್ಟ ರಾತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಗುಣಕಗಳಾವವು ಎಂಬುದನ್ನು ಹುಡುಕುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಈ ಮಾತನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

ಕೆಳಗಿನ ರಾತಿಗಳ ಗುಣಕವ್ಯುತ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

೧. $೮ + ೨೮ - ೪೩ರ + ೪೦.$
೨. $೪ + ೧೩೪ + ೪೨೪ + ೩೫.$
೩. $೬೮ + ೫೮ - ೨೧೮ + ೧೦.$
೪. $೧೨೪ + ೨೨೪ + ೬೪ - ೫.$
೫. $೪೮ - ೨೮ + ೨ರ + ೧.$
೬. $೬೮ + ೧೯೮ + ೨೦ರ + ೨.$

೭. $ಕ್ಷ^೪ + ೭ಕ್ಷ^೩ + ೯ಕ್ಷ^೨ - ೭ಕ್ಷ - ೧೦$.
೮. $೨೫ಅ^೪ - ೫೦ಅ^೩ + ೯ಅ^೨ + ೩೭ಅ - ೧೭$.
೯. $೧೫ಯ^೪ + ೭ಯ^೩ - ೧೫ಯ^೨ - ೭ಯ + ೪$.
೧೦. $೭ಅ^೪ + ೫ಅ^೩ - ೩೭ಅ^೨ + ೩೭ಅ - ೧೦$.
೧೧. $೯ಕ್ಷ^೪ - ೧೭ಕ್ಷ^೩ - ೫ಕ್ಷ^೨ + ೧೭ಕ್ಷ - ೪$.
೧೨. $ಕ್ಷ^೩ - ೭ಕ್ಷ^೨ - ೧೫ಕ್ಷ + ೧೦೦$.
೧೩. $ಯ^೪ - ೧೦ಯ^೩ + ೩೫ಯ^೨ - ೫೦ಯ + ೨೪$.
೧೪. $ಕ್ಷ^೩ - ೭ಕ್ಷ^೨ - ೬ + ೨೦$.
೧೫. $೨ನ^೩ - ೧೧ನ^೨ + ೧೭ನ - ೯$.
೧೬. $೪ಯ^೩ - ೨೭ಯ - ೨೭$.
೧೭. $೪ನ^೩ - ೭೫ನ + ೧೨೫$.
೧೮. $೭ಕ್ಷ^೪ + ೧೭ಕ್ಷ^೩ - ೭೫ಕ್ಷ^೨ + ೪ಕ್ಷ + ೨೦$.
೧೯. $೪ಯ^೩ + ೭೦ಯ^೨ - ೭೦ಯ + ೯ ಕೈಯ^೨ + ೨೦ + ೭$ ರಿಂದ ಭಾಗ
ಹೋದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.
೨೦. $ನ^೪ + ೧೫ನ^೩ + ೨೫ನ^೨ + ೯ನ - ೨೪ ಕೈ ನ^೨ + ೨ನ - ೭$ ರಿಂದ ಭಾಗ
ಹೋದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.
೨೧. $೭ನ^೪ - ೧೭ನ^೩ - ೭೫ನ^೨ + ೯ನ + ೧ ಕೈ ನ^೨ - ೨ನ - ೪$ ರಿಂದ
ಭಾಗ ಹೋದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.
೨೨. $೭ಕ್ಷ^೪ - ೧೭ಕ್ಷ^೩ - ೩೭ಕ್ಷ^೨ + ೭೭ಕ್ಷ + ೯ ಕೈ ಕ್ಷ^೨ - ೨ಕ್ಷ - ೪$ ರಿಂದ
ಭಾಗ ಹೋದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.
೨೩. $೭ಕ್ಷ^೪ + ೭ಕ್ಷ^೩ - ೧೭ಕ್ಷ^೨ + ೯ಕ್ಷ + ೯ ಕೈ ಕ್ಷ^೨ - ೧$ ರಿಂದ ಭಾಗ
ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.

೪.

೩.೧೧. ಸಮಕೋಟಿ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಘಾತ (Homogeneous) ರಾಶಿಗಳು.

ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿಯ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.
ಯ + ಕ್ಷ, ಯ - ಕ್ಷ, ಪ + ಬ + ಮ, ೨ಪ + ಬ - ಮ, ಪ - ಬ + ೪ಮ,

ಪೌ + ಬೌ, ಪೌ - ಮೌ, ಏಯೌ - ಏಯಕ್ಷ + ಏಕ್ಷೌ, ಪೌ + ಬೌ + ಮೌ
 + ಏಪಬ + ಏಬಮ + ಏಮಪ,
 ಯೌ + ರೌ + ಲೌ ಓಯರಲ, ಪೌ - ಓಪೌಬ + ಓಪೌಬ - ಬೌ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಮ್ಯವು ಕಂಡು ಬರುವದೋ? ಅದು ಎಂತಹದು? ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳು ಪ್ರಥಮ ಘಾತದವು ಇರುವವು. ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಘಾತಪರಿಮಾಣವು (Degree) ಎರಡು ಇರುವವು, ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಘಾತಪರಿಮಾಣವು ಮೂರು ಇರುವದು.

ಯಾವ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಘಾತಪರಿಮಾಣವು ಒಂದೇ ಇರುವದೋ ಆ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸಮಕೋಟಿ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳು ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೇಲಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳು ಏಕಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳು ಇದ್ದು ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

ಯೌ + ರೌ + ಅಯರ ಇದು ಯ,ರ ಮತ್ತು ಅ ಇವುಗಳಿಂದಾದ ತ್ರಿಕೋಟಿ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿ ಇರುವದು. ಆದರೆ ರಾಶಿಯು ಕೇವಲ ಯ ಮತ್ತು ರ ಈ ವರ್ಗಗಳದ್ದೇ ಇದ್ದು ಅ ಇದು ಯರ ದ ಒಂದು ಸಹಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ, ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಅದು ಸಮಘಾತವಲ್ಲ.

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಘಾತವೇ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ಕೋಟಿಯು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳ ಕೋಟಿಗಳ ಬೇರಿನಷ್ಟು ಇರುವದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

೩.೧.೨. ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಿತ (Symmetrical) ರಾಶಿಗಳು.

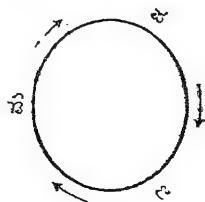
ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ಅಡಲುಬಡಲುನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಯಾವ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಡಲು ಅಗುವದಿಲ್ಲವೋ, ಆ ರಾಶಿಯು ಆ ವರ್ಗಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ

ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಮಿತವಿದೆಯೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ+ಮ, ಪ+ಮ, ಪ-ಮ+ಮ, ಏಷ+೨ಪಮ+೨ಪಮ+ಏಷ ಈ ರಾಶಿಗಳು. ಪ ಮತ್ತು ಮ ಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸಮ-ಪ್ರಮಾಣವಿರುವವು. ಯ+ರ+ಲ, ಯ+ರ+ಲ, ಯರ+ರಲ+ಲಯ, ಯ+ರ+ಲ-೨ಯರಲ ಇವು ಯ,ರ,ಲ ಗಳ ವಿಷಯ-ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣವಿರುವವು. ಅ (ಪ+ಬ+ಮ) ಇದು ತ್ರಿವರ್ಣ ಏಕಶೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಯ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ ರೂಪ-ವಿದ್ದು ಅ (ಪ+ಬ+ಮ)+ಕ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ) ಇದು ತ್ರಿವರ್ಣ ದ್ವಿಶೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಯ ಮತ್ತು ಅ (ಪ+ಬ+ಮ)+ಕ(ಪಬ+ಬಮ+ಬಮ+ಮಪ+ಮಪ)+ಗಪಮ ಇದು ತ್ರಿವರ್ಣ ತ್ರಿಶೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಯ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅ,ಕ,ಗ ಇವು ಯಾವುದಾದರೂ ಜ್ಞಾತ ಸಹಗುಣಕಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಅಂಕಿಕ ಜಿಲೆಯು ಎಷ್ಟಿದ್ದರೂ ಪ,ಬ,ಮ ಈ ಮೂರು ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡರ ಆದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ.

ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಪ್ರಮಾ-ಣವೇ ಇರುವದು.

೩.೧೩. ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮ ಮತ್ತು ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಗಳು.

ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ, ಪ(ಬ-ಮ)
+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ),
ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)
+ಮ(ಪ-ಬ), ಪಬ(ಪ-ಬ)+
ಬಮ(ಬ-ಮ)+ಮಪ(ಮ-ಪ),
ಪ(ಬ+ಮ)+ಬ(ಮ+ಪ)+
ಮ(ಪ+ಬ) ದಂತಹ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಾವು



ಅಕ್ಷತಿ ೪

ನಿರ್ದಿಷ್ಟದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಪ, ಬ, ಮ ಈ ವರ್ಣಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವವು. ಮತ್ತು ಪದ ಬದಲಾಗಿ ಬ, ಬ ದ ಬದಲಾಗಿ

ಮ ಮತ್ತು ಮ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಬದಲೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವನೂ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಹಿಂದಿನ ಪುಟದ ಮೇಲಿರುವ ಅಕ್ಷತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಈ ವರ್ಣಗಳನ್ನು ಒಂದು ವರ್ತುವ ಸುತ್ತಲೂ ಮಂಡಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಬಾಣಗಳ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಓದಿದರೆ ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅವು ಒಂದರ ಹಿಂದೆ ಒಂದು ಬಂದಿರುವವೋ ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅವು ಬಂದಿರುವವು. ಪ ದ ನಂತರ ಬ, ಬ ದ ನಂತರ ಮ, ಮ ದ ನಂತರ ಪ, ಇದು ಅವುಗಳ ಕ್ರಮವಿರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ, ಬ, ಮ ಈ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ ಈ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಆ ವರ್ಣಗಳೂ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವವು ಕಂಡುಬರುವವು. ಮಂಡಿಸುವ ಈ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮವೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದ್ದು ಈ ತರುವದ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಗಳೆಂದನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಯಾವುದೇ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ಒಂದು ಪದವು ತಿಳಿದರೆ ನಮಗೆ ಉಳಿದ ಪದಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೇಲೆ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಯ(ರಾ-ಮ)+....+....ಈ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೊಡದೇ ಇದ್ದ ಎರಡು ಪದಗಳು ಯಾವವು ಇರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಪದಗಳ ರಚನೆಯ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ರಾಶಿಯು ಯ(ರಾ-ಮ)+ರ(ಮ-ಯ)+ಪ(ಯ-ರಾ) ಇವೇ ಕೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

೩.೧೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಅದರ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ.

ಉ. ೧. ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ) ಇದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧ನೇ ರೀತಿ:— ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಅವಸ್ಥಾವಿಧದಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಯಾವದಾದರೊಂದು, ವರ್ಗದ ಘಾತಗಳ ವಿರಿಕೆಯ ಇಲ್ಲವೆ ಇಳಿತದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) + \text{ಬ}^{\circ}\text{ಮ} - \text{ಪಬ}^{\circ} + \text{ಮ}^{\circ}\text{ಪ} - \text{ಬಮ}^{\circ} \\
 &= \text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) - \text{ಪ}(\text{ಬ}^{\circ}-\text{ಮ}^{\circ}) + \text{ಬಮ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) \\
 &= (\text{ಬ}-\text{ಮ})\{\text{ಪ}^{\circ}-\text{ಪ}(\text{ಬ}+\text{ಮ})+\text{ಬಮ}\} \\
 &= (\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}^{\circ}-\text{ಪಬ}-\text{ಪಮ}+\text{ಬಮ}) \\
 &= (\text{ಬ}-\text{ಮ})\{\text{ಪ}(\text{ಪ}-\text{ಬ})-\text{ಮ}(\text{ಪ}-\text{ಬ})\} \\
 &= (\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಪ}-\text{ಮ}) \\
 &= -(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ}) \quad [\because \text{ಪ}-\text{ಮ} = -(\text{ಮ}-\text{ಪ})]
 \end{aligned}$$

ಅನಯವಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸುವದು ಒಳ್ಳೆಯದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹಾಗೆ ಬರೆದಿದೆ.

೨ನೇ ರೀತಿ:— ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಪ ದ ಬದಲಾಗಿ ಬ ಇಟ್ಟರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತದೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತದಂತೆ ಪ—ಬ ಇದ್ದೊಂದು ಅನಯವವಿವೆ ಎಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಬ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮ ಹಿಡಿದರೂ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಬ—ಮ ಮತ್ತು ಮ—ಪ ಇವಾದರೂ ಅನಯವಗಳಿರುವವು. ಮತ್ತು ಇದು ಸಹಜವಿವೆ. ರಾಶಿಯು ಚಕ್ರೀಯ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಒಂದು ಅನಯವವು ಪ—ಬ ಇದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯದು ಬ—ಮ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದು ಮ—ಪ ಇರಬೇಕು. ಈಗ ರಾಶಿಯು ಚಕ್ರೀಯ ಇದ್ದುದರಿಂದ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಜೇರಿ ಗುಣಕವು ಇರಲಾರದು, ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವಿರಬಹುದು. ಅದು ಅ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ,

$$\begin{aligned}
 &\text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) + \text{ಬ}^{\circ}(\text{ಮ}-\text{ಪ}) + \text{ಮ}^{\circ}(\text{ಪ}-\text{ಬ}) \\
 &\equiv \text{ಅ}(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ}) \quad \text{ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು} \\
 &\text{ಇದ್ದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ಇವುಗಳ ಯಾವುದೇ ಜೆರಿಗಳಿಗೂ ನಿಜ ಇರುವದು.} \\
 &\text{ಪ}=೦, \text{ಬ}=೧, \text{ಮ}=೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ } ೦ + ೧(೨-೦) + \\
 &೨(೦-೧) = ೨(೨-೧)(೧-೨)(೨-೦) \\
 &\therefore ೨-೦ = ೨೨, \text{ ಅಂದರೆ } ೨೨ = -೨, ೨೦-೨ = -೧ \\
 &\therefore \text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) + \text{ಬ}^{\circ}(\text{ಮ}-\text{ಪ}) + \text{ಮ}^{\circ}(\text{ಪ}-\text{ಬ}) \equiv \\
 &\quad \dots (\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ}).
 \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ಪಬ(ಪ^೨—ಬ^೨) + ಬಮ(ಬ^೨—ಮ^೨) + ಮಪ(ಮ^೨—ಪ^೨).
ಇದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ.

೧ನೇ ರೀತಿ:-

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ಪ}^2\text{ಬ} - \text{ಪಬ}^2 + \text{ಬಮ}(ಬ^2 - \text{ಮ}^2) + \text{ಮ}^2\text{ಪ} - \text{ಮಪ}^2 \\
 &= \text{ಪ}^2\text{ಬ} - \text{ಮಪ}^2 - \text{ಪಬ}^2 + \text{ಮ}^2\text{ಪ} + \text{ಬಮ}(ಬ^2 - \text{ಮ}^2) \\
 &= \text{ಪ}^2(ಬ - \text{ಮ}) - \text{ಪ}(ಬ^2 - \text{ಮ}^2) + \text{ಬಮ}(ಬ^2 - \text{ಮ}^2) \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})\{\text{ಪ}^2 - \text{ಪ}(ಬ + ಬಮ + \text{ಮ}) + \text{ಬಮ}(ಬ + \text{ಮ})\} \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಪ}^2 - \text{ಪಬ} - \text{ಪಬಮ} - \text{ಪಮ} + ಬ^2\text{ಮ} + ಬಮ^2) \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(ಬ^2\text{ಮ} - \text{ಪಬ}^2 + ಬಮ^2 - \text{ಪಬಮ} - \text{ಪಮ} + \text{ಪ}^2) \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})\{ಬ^2(\text{ಮ} - \text{ಪ}) + ಬಮ(\text{ಮ} - \text{ಪ}) - \\
 &\quad \text{ಪ}(\text{ಮ} - \text{ಪ})\} \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})\{ಬ^2 + ಬಮ - \text{ಪ}(\text{ಮ} + \text{ಪ})\} \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})(ಬ^2 - \text{ಪ}^2 + ಬಮ - \text{ಪಮ}) \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})\{ಬ + \text{ಪ}\}\{ಬ - \text{ಪ}\} + \text{ಮ}(ಬ - \text{ಪ})\} \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})(ಬ - \text{ಪ})(ಬ + \text{ಪ} + \text{ಮ}) \\
 &= -(ಪ - ಬ)(ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})(ಪ + ಬ + \text{ಮ}) \\
 &[\because ಬ - \text{ಪ} = -(ಪ - ಬ)]
 \end{aligned}$$

* ನೋದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಪ ದ ಇಳಿತದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ ಬ—ಮ ಈ ಅವಯವ ದೊರೆತ ಕೂಡಲೇ ಎರಡನೇ ಕಂಪಿನಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ೨ ದ ಹೊರತೂ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವರ್ಗದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವುದು ವಿಶ್ಯವು. ಆದರಂತೆ ಇಲ್ಲಿ ಬ,ದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ.

೨ನೇ ರೀತಿ:- ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಪ=ಬ, ಬ=ಮ ಇಲ್ಲವೆ ಮ=ಪ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ ಆದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ—ಮ, ಬ—ಮ ಮತ್ತು ಮ—ಪ ಈ ಅವಯವಗಳು ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಈಗ ರಾಶಿಯು ಕೆತುಮೋಟಿಕ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಯವವು ಕೆತುಮೋಟಿಕವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಚಕ್ರೀಯವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಏಕಕೋಟಿಕ ಗುಣಕವು ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಈಗ ಇಂಥ

ಗುಣಕವು ಸ+ಬ+ಮ ಇದು ಒಂದೇ ಇರುವದು. ಈಗ ಇದರ ಹೊರತೂ ಜೇರೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವೂ ಇರಬಹುದು. ಅದು ಈ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ

$$\begin{aligned} & \text{ಸಬ (ಪ-ಅ) + ಬಮ (ಬ-ಮ) + ಮಪ (ಮ-ಪ)} \\ & = \text{ಅ (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)(ಸ+ಬ+ಮ)} \end{aligned}$$

ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಸ, ಬ, ಮ ಇವುಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು. ಸ=೦, ಬ=೧, ಮ=೨ ಎಂಬ ಹಿಡಿದರೆ ೦ + ೧.೨(೧-೨) + ೦ = ಅ(-೧)(೧-೨)(೨)(೧+೨)

$$\therefore -೬ = ೬ಅ; \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } ಅ = -೧.$$

$$\begin{aligned} \therefore & \text{ಸಬ(ಪ-ಬ) + ಬಮ(ಬ-ಮ) + ಮಪ(ಮ-ಪ)} \\ & = -(\text{ಪ-ಬ})(\text{ಬ-ಮ})(\text{ಮ-ಪ})(\text{ಸ+ಬ+ಮ}). \end{aligned}$$

ಉ. ೩. ಯಾ(ರ-ಲ)^೩ + ರಾ(ಲ-ಯ)^೩ + ಲಾ(ಯ-ರ)^೩ ಇದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

$$\begin{aligned} \text{ರಾತಿಯು} &= \text{ಯಾ(ರ-ಲ)} + \text{ರಾ(ಲ-ಯ)} + \text{ಲಾ(ಯ-ರ)} \\ &+ \text{ಲಾ(ಯ-೨ಯಾರ+೨ಯರ-ರ)} \\ &= -ಯಾ(ರ-ಲ) + ಯಾ(ರ-ಲ) + \\ &\quad ೨ಯಾರ(ರ-ಲ) - ರಾಲ(ರ-ಲ) \\ &= (ರ-ಲ) \{ -ಯಾ(ರ+ಲ) + ಯಾ(ರ-ಲ) + \\ &\quad ೨ಯಾರ-ರಾಲ \} \\ &= (ರ-ಲ) \{ -ಯಾರ-ಯಾಲ + ಯಾ(ರ-೨ರಲ+ಲ) \\ &\quad + ೨ಯಾರ-ರಾಲ \} \\ &= (ರ-ಲ) \{ -ರಾ(ಲ-ಯ) + ಯಾ(ಲ-ಯ) + \\ &\quad ಯಾಲ(ಲ-ಯ) \} \\ &= (ರ-ಲ)(ಲ-ಯ) \{ -ರಾ(ಲ+ಯ) + ಯಾರ+ಯಾಲ \} \\ &= (ರ-ಲ)(ಲ-ಯ) \{ ಲ(ಯ-ರ) + ಯಾ(ಯ-ರ) \} * \\ &= (ಯ-ರ)(ರ-ಲ)(ಲ-ಯ) \{ ಲ(ಯ+ರ) + ಯಾ \} \\ &= (ಯ-ರ)(ರ-ಲ)(ಲ-ಯ)(ಯರ+ರಲ+ಲಯ). \end{aligned}$$

* ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಇಳಿತದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ ರ = ಲ ಈ ಅವಯವವು ದೊರೆತ ಕೂಡಲೇ ಎರಡನೇ ಕಂಪನಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ರದ ಇಳಿತದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದೆ, ಮತ್ತು ಅವರಂತೆ ಮಾಡಿ ಲ = ಯ ಈ ಅವಯವವು ದೊರೆತಕೂಡಲೇ ಮುಂದಿನ ಕಂಪನಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಲದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ. ಮಂಡಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ಒಮ್ಮೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವರ್ಗವನ್ನು ತಿರುಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಲ್ಲ, ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಮೊದಲಯದ, ತರುವಾಯ ರದ, ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಲದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಇದೇ ಗುಣವೃಥಕ್ರರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ = ರ, ಇಲ್ಲವೆ ರ = ಲ, ಇಲ್ಲವೆ ಲ = ಯ ಇಟ್ಟರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವದೊಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಯ = ರ, ರ = ಲ ಮತ್ತು ಲ = ಯ ಈ ಅವಯವಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಈ ಅವಯವವು ಏಕಕೋಟಿಕವಿದ್ದು ರಾಶಿಯು ಪಂಚಕೋಟಿಕವಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಯ, ರ, ಲ ಗಳೊಳಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚಕ್ರೀಯ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ಅವಯವವು ಇದಿರಬೇಕು. ಚಕ್ರೀಯ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಯ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯರೂಪವು $(ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨) + ಕ(ಯರ + ರಲ + ಲಯ)$ ಇದು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, $ಯ^೨(ರ - ಲ)^೨ + ರ^೨(ಲ - ಯ)^೨ + ಲ^೨(ಯ - ರ)^೨ \equiv (ಯ - ರ)(ರ - ಲ)(ಲ - ಯ)$

$\{ (ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨) + ಕ(ಯರ + ರಲ + ಲಯ) \}$.

ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆದು ಯ, ರ, ಲ ಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಿರುವದು.

ಯ = ೦, ರ = ೧, ಲ = ೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ $ಲ - ಲರ = (೨ - ೨ + ೨ಕ)$, ಮತ್ತು

ಯ = -೧, ರ = ೦, ಲ = ೧ ಹಿಡಿದರೆ $-೧ - ೧ = ೨(೨ - ಕ)$,

ಅ. ೨೨ - ಕ = ೧. \therefore ಕ = ೦, ಕ = ೧.

\therefore $ಯ^೨(ರ - ಲ)^೨ + ರ^೨(ಲ - ಯ)^೨ \equiv (ಯ - ರ)(ರ - ಲ)(ಲ - ಯ)$

(ಯರ + ರಲ + ಲಯ),

೧. ೪. $ಪ^೨(ಬ + ಮ) + ಬ^೨(ಮ + ಪ) + ಮ^೨(ಪ + ಬ) + ೨ಪಬಮ$ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ಪ}^2(\text{ಬ} + \text{ಮ}) + \text{ಪ}(\text{ಬ}^2 - ೨\text{ಬಮ} + \text{ಮ}^2) + \text{ಬಮ}(\text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 &= \text{ಪ}^2(\text{ಬ} + \text{ಮ}) + \text{ಪ}(\text{ಬ} + \text{ಮ})^2 + \text{ಬಮ}(\text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 &= (\text{ಬ} + \text{ಮ}) \{ \text{ಪ}^2 + \text{ಪ}(\text{ಬ} + \text{ಮ}) + \text{ಬಮ} \} \\
 &= (\text{ಬ} + \text{ಮ}) \{ \text{ಪ}(\text{ಪ} + \text{ಬ}) + \text{ಮ}(\text{ಪ} + \text{ಬ}) \} \\
 &= (\text{ಪ} + \text{ಬ})(\text{ಬ} + \text{ಮ})(\text{ಮ} + \text{ಪ}).
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲವೆ ಪ = -ಬ, ಇಲ್ಲವೆ ಬ = -ಮ, ಇಲ್ಲವೆ ಮ = -ಪ ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ+ಬ, ಬ+ಮ ಮತ್ತು ಮ+ಪ ಇವು ಗುಣಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕವು ಏಕಕೋಟಿಕವಿದ್ದು ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ವರ್ಮಾತ್ಮಕ ಗುಣಕಗಳು ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವು ೩ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಪ^೩(ಬ+ಮ) + ಬ^೩(ಮ+ಪ) + ಮ^೩(ಪ+ಬ) ≡ ೩(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ) ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು. ಪ=೦, ಬ=೦ ಮತ್ತು ಮ=೦ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ೨+೪=೩×೦×೦×೦×೨ ೩೦+೬೩=೬, ೩೦+೩=೦. ಆದುದರಿಂದ ಪ^೩(ಬ+ಮ) + ಬ^೩(ಮ+ಪ) + ಮ^೩(ಪ+ಬ) ≡ (ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ).

ಉ.೫. (ಪ-ಬ)^೩ + (ಬ-ಮ)^೩ + (ಮ-ಪ)^೩ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಪ=ಬ, ಇಲ್ಲವೆ ಬ=ಮ, ಇಲ್ಲವೆ ಮ=-ಪ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಪ-ಬ, ಬ-ಮ, ಮತ್ತು ಮ-ಪ ಇವು ಗುಣಕಗಳಿವೆ. ಈ ಮೂರು ಏಕ ಕೋಟಿಕ ಇದ್ದು ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಕೋಟಿಕವಿದ್ದುದರಿಂದ ಇನ್ನಾವುದೂ ವರ್ಮಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವು ೩ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ.

$$\begin{aligned}
 &(\text{ಪ} - \text{ಬ})^3 + (\text{ಬ} - \text{ಮ})^3 + (\text{ಮ} - \text{ಪ})^3 \\
 &\equiv ೩(\text{ಪ} - \text{ಬ})(\text{ಬ} - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ}). \text{ ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿದೆ.} \\
 &\text{ಆದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು.}
 \end{aligned}$$

ಪ=೦, ಬ=೧, ಮ=೨ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, —೧—೧+೨

=ಅ(—೧)(—೧)², ಅ೦·೨ಅ=೬, ಅ೦·ಅ=೩.

∴ (ಪ—ಬ)² + (ಬ—ಮ)² + (ಮ—ಪ)² ≡ ೬(ಪ—ಬ)
(ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ).

ಉ.೬. (ಪ+ಬ+ಮ)² — ಪ² — ಬ² — ಮ² ಇದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪುರಣ-
ವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಪ=—ಬ, ಇಲ್ಲವೆ ಬ=—ಮ ಇಲ್ಲವೆ ಮ=—ಪ ಎಂದು
ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ, ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪ+ಬ,
ಬ+ಮ, ಮತ್ತು ಮ+ಪ ಇವು ಅವಯವಗಳಿರುವವು. ಅವು ಏಕಕೋಟಿಕ
ವಿದ್ದು ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಕೋಟಿಕವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ಯಾವ
ವರ್ಜ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕಗಳು ಇರಲಾರವು. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವು ಅ ಎಂದು
ತಿಳಿದರೆ,

(ಪ+ಬ+ಮ)² — ಪ² — ಬ² — ಮ² ≡ ೬(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)
(ಮ+ಪ). ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ದ
ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು.

ಪ=೦, ಬ=೧, ಮ=೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, ೨೭—೧—೬=೨೦.೩·೨·೨,
ಅ೦·೬ಅ=೧೨, ಅ೦·ಅ=೬.

∴ (ಪ+ಬ+ಮ)² — ಪ² — ಬ² — ಮ² ≡ ೬(ಪ+ಬ)
(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ). ಹಿಂದೆ ಪು. ೨೫, ೨೬ ಗಳ ಮೇಲೆ
(ಪ+ಬ+ಮ)² = ಪ² + ಬ² + ಮ² + ೬(ಪ+ಬ)
(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ) ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ
ಮೇಲಿಂದ ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ

(ಪ+ಬ+ಮ)² — ಪ² — ಬ² — ಮ² ≡

೬(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ) ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ.೭. ಪ²(ಬ+ಮ) + ಬ²(ಮ+ಪ) + ಮ²(ಪ+ಬ) + ೩ಪಬಮ
ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ರಾಶಿಯು = ಪ²(ಬ+ಮ) + ಪಬಮ + ಬ²(ಮ+ಪ) + ಪಬಮ
+ ಮ²(ಪ+ಬ) + ಪಬಮ

$$\begin{aligned}
 &= ಪ\{ಪ(ಬ+ಮ)+ಬಮ\} + \\
 &ಬ\{ಬ(ಮ+ಪ)+ಪಮ\} + ಮ\{ಮ(ಪ+ಬ)+ಪಬ\} \\
 &= ಪ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ) + ಬ(ಬಮ+ಬಪ+ಪಮ) \\
 &+ ಮ(ಮಪ+ಮಬ+ಪಬ) \\
 &= ಪ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ) + ಬ(ಪಮ+ಬಮ+ಮಪ) + \\
 &ಮ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ) [ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿ] \\
 &= (ಪ+ಬ+ಮ)(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ).
 \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ೧-೭ ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಹಳ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಮತ್ತು ಉಪಯುಕ್ತವಿದ್ದುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವುದು ಒಪ್ಪ ಅನಿವಾರ್ಯವಿದೆ. ಯಾವಾಗಲೂ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗ ಬಹಳ ಅಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೬.

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. ಯರ(ಯ-ರ)+ರಲ(ರ-ಲ)+ಲಯ(ಲ-ಯ).
೨. ಪಬ(ಪ+ಬ)+ಬಮ(ಬ+ಮ)+ಮಪ(ಮ+ಪ)+೩ಪಬಮ.
೩. ತ(ದ-ನ)+ದ(ನ-ತ)+ನ(ತ-ದ).
೪. ಯ(ಪ-ಮ)+ಪ(ಮ-ಯ)+ಮ(ಯ-ಪ).
೫. ಯ(ರ+ಲ)+ರ(ಲ+ಯ)+ಲ(ಯ+ರ)-೪ಯರಲ.
೬. (ಪ+ಬ+ಮ)(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ)-ಪಬಮ.
೭. ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ).
೮. ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ).
೯. ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ).
೧೦. ಯ(ರ-ಲ)+ರ(ಲ-ಯ)+ಲ(ಯ-ರ).
೧೧. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)+(ಮ-ಬ)(ಪ-ಬ).
೧೨. ಯ(ರ-ಲ)+ರ(ಲ-ಯ)+ಲ(ಯ-ರ).
೧೩. (ಯ-ರ)+ರ(ಲ-ಯ)+ಲ(ಯ-ರ).
೧೪. (ಯ+ರ)ಲ+(ಯ+ರ)(ಯರ+ಲ)+೨ಯರಲ.

೧೫. ಯ + ರ, ರ + ಲ, ಲ + ಯ,

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಸದಿಯು ರೂಢ್ಯವಿದ್ದರೆ
ಯ^೨(ರ + ಲ) + ರ^೨(ಲ + ಯ) + ಲ^೨(ಯ + ರ) + ೨ಯರಲ
ಈ ರಾಶಿಯು ಶೂನ್ಯವಿರುವದೆಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಮು. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

೪.೧. ಬಹಳ ಸುಲಭವಿರುವ ರಾಶಿಗಳ ಮಹತ್ತರವು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ
ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಲಘುತವು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವನ್ನು ಹೇಗೆ
ತೆಗೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಎರಡನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎಂಬಿನೆಯ ಮತ್ತು
ಒಂಭತ್ತನೆಯ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ (ಪು. ೧೬೫—೧೮೧) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ
ಇದು ಉಪಯೋಗವಿರುವ ಪ್ರಾರಂಭಮಾಡಿ ಅದೇ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದಿನ
ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

೧.

ಸ್ವಲ್ಪ ಉಪಲಕ್ಷಣ

೪.೨. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗೆ ಯಾವ ರಾಶಿಯಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಅದು
ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ವಿಭಾಜಕವು ಮತ್ತು, ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಿಂದ ಯಾವ ರಾಶಿಗೆ
ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಅದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ವಿಭಾಜ್ಯವು.
ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ವಿಭಾಜಕವಿದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣವಿರುವದು, ಮತ್ತು
ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯು ಅದರ ವಿಭಾಜ್ಯದ ಗುಣವಿರುತ್ತದೆ.

೪.೩. ಅಯಕ್ಕೆ ಯ ದಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಅಯ ದ
ವಿಭಾಜಕವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು, ಅದರಿಂದ ಕಯಕ್ಕೆ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ.
ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಕಯ ದ್ವಾದರೂ ವಿಭಾಜಕವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ
ಎರಡಕ್ಕೂ ಭಾಗಹೋಗುವದರಿಂದ ಅದು ಎರಡರ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ—
ವಿರುತ್ತದೆ.

ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣವಿರುವುದು, ನ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣವಿರುವುದು ಮತ್ತು ಪಯ ನಾದರೂ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣವಿರುವುದು. ಆದರೆ ಈ ಮೂರೂ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಗಳಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ ವಿಭಾಜಕಗಳಲ್ಲಿ) ಪಯ ಇದು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಾದಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. (ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ) ಇರುತ್ತದೆ.

೪.೪. ಅಕಯ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಅಯ ದಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಅಯ ದ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವುದು, ಮತ್ತು ಕಯ ದಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಕಯ ದಾದರೂ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವುದು, ಮತ್ತು ಅವಕ್ಕೆ ಅಯ ಮತ್ತು ಕಯ ಈ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ಅದು ಎರಡರ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವುದು.

ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಈ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದ ಅಕಪಯಕ್ಕೆ ಭಾಗಹೋಗುವುದು. ಅದುದರಿಂದ ಅಕಪಯ ಇದು ಅವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವುದು. ಆದರೆ ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಇವುಗಳಿಂದ ಅಕಪಯಕ್ಕೆ ಮೇಗೆ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆಂದೂ ಅವರಂತೆಯೇ ಅವುಗಳಿಂದ ೨ ಅಕಪಯ, ೩ ಅಕಪಯ, ೪ ಅಕಪಯ, ೫ ಅಕಪಯ, ಸ್ವಲ್ಪದಷ್ಟು ಹೇಳುವುದೆಂದರೆ ಅಕಪಯ ದ ಯಾನ್ತ್ರವೇ ಮತ್ತೆಗೆ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ ಅಕಪಯ ಮತ್ತು ಅವರಂತೆ ಅವರ ಯಾನ್ತ್ರವೇ ಮತ್ತೆ ಇರುವಂಥ ರಾಶಿಯು ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಇವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಅನಂತ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಅಕಪಯ ಇದು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥೂಲ, ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. (ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ).

೪.೫. ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಹತ್ತಮ ಅಪವರ್ತಕ ಮತ್ತು ಲಘುತಮ ಅಪವರ್ತಕ ಎಂದು ಸಂಜ್ಞೆಗಳಿವೆ. ಅಪವರ್ತಕ ಅಂ. ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಕ ಅಂ. ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ.

೪.೬. ಏಕಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಸ್ವಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಗಳು ಯಾವುವು ಮತ್ತು ಆ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಗಳಲ್ಲಿ **ಮಹತ್ತಮ** ಯಾವುದು ಎಂಬುದನ್ನು, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಆ ರಾಶಿಗಳಿಂದ ಯಾವ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಹೋಗುವದೋ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ **ಲಘುತಮ** ಯಾವುದು ಎಂಬುದನ್ನು, ಅವುಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದ್ದೊಡನೆಯೇ ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ನೋಡುವದರಿಂದ ನಾವು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೩೦೮೪೪೦ ಮತ್ತು ೨೪೮೪೪೦೦ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ೮೪, ೪೦ ಮತ್ತು ೪೦ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೮, ೪ ಮತ್ತು ೪ ಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಗಳು, ಮತ್ತು ೬ ಇದು ೩೦ ಮತ್ತು ೨೪ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು. ಆದುದರಿಂದ ೬೮೪೪೪೦ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಅದರಂತೆಯೇ ೮೪, ೪೦ ಮತ್ತು ೪೦ ಇವು ೮, ೪ ಮತ್ತು ೪ ಗಳ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಗಳು, ಮತ್ತು ೧೦೦ ಇದು ೩೦ ಮತ್ತು ೨೪ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ಆದುದರಿಂದ ೧೦೦೮೪೪೦೦ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

೯೮೪೪೪೦, ೧೦೮೪೪೦೦ ಮತ್ತು ೧೮೪೪೪೦೦೦೦ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ, ೮೦ ಇದು ಅವರ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು, ೪ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಅವರ ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ, ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಸಾಧಾರಣವಲ್ಲ, ೪೦ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ, ಆದರೆ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ, ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಸಾಧಾರಣವಲ್ಲ, ೪ ಇದು ೪೦ ದ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು, ಮತ್ತು ೯, ೧೦ ಮತ್ತು ೧೮ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು ೩, ಆದುದರಿಂದ ೩೮೪೪೦ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಅದರಂತೆಯೇ ೮೦, ೪೦ ಮತ್ತು ೪೦ ಇವು ೮, ೪ ಮತ್ತು ೪ ಗಳ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಗಳು, ಮತ್ತು ೩೬ ಇದು ೯, ೧೦ ಮತ್ತು ೧೮ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇದ್ದುದರಿಂದ ೩೬೮೪೪೦೦೦ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಏಕಪದ ರಾಶಿಗಳೆ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವದಿಂದರೆ ಅಂಕ ಗುಣಕಗಳೆ ದೃಢಭಾಜಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಣದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಣ್ಣ ಘಾತವು ಕಂಡುಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು. ಈ ಎಲ್ಲವುಗಳ ಗುಣಾ-ಕಾರವೇ ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಎಲ್ಲ ಅಂಕಗುಣಕಗಳಿಂದ ಭಾಗ-ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಯಾವುದು ಮೊದ್ಲ ಘಾತವು ಕಂಡು ಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು. ಈ ಎಲ್ಲವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೇ ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧೭. (ಉಪಕರಣ)

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. (ಇಂಥ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೋದ ವರುಷ ಬಿಡಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕೇವಲ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವಂಥವವಿವೆ.)

೧. ೪ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಅಂಕಗಳಮೇ.
೨. ೮ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೨೦ಅಂಕಗಳಮೇ.
೩. ೨೭ಯಂಕಗಳಮೇ ; ೨೦ಯಂಕಗಳಮೇ.
೪. ೨೫ಯಂಕಗಳಮೇ ; ೨೦ಯಂಕಗಳಮೇ.
೫. ೨೦ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೨೦ಅಂಕಗಳಮೇ.
೬. ೧೭ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಅಂಕಗಳಮೇ.
೭. ೮ಯಂಕಗಳಮೇ ; ೨೦ಯಂಕಗಳಮೇ.
೮. ೧೦ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೨೦ಅಂಕಗಳಮೇ.
೯. ೬ಯಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಯಂಕಗಳಮೇ ; ೨೦ಯಂಕಗಳಮೇ.
೧೦. ೧೦ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಅಂಕಗಳಮೇ.
೧೧. ೨೦ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಅಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಅಂಕಗಳಮೇ.
೧೨. ೮ಯಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಯಂಕಗಳಮೇ ; ೬ಯಂಕಗಳಮೇ ; ೧೦ಯಂಕಗಳಮೇ.

೨.

೪-೭. ಏಕಪದರಾಶಿಗಳ ಗುಣಗಳು, ಅವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ, ಬಹಳ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳೆ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ನೋಡಿ ಹೇಳಲು ಬರುವವು. ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳು ಏಕಪದವಿಲ್ಲದೇ ಇದ್ದರೂ ಅವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳು ಸಹ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವವು ಮತ್ತು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಕೇವಲ ಕಣ್ಣುಗಳಿಂದ ನೋಡುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳೆ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಅ+ಅಕ+ಕ ಮತ್ತು ಅ-ಕ ಇವುಗಳೆ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಅ+ಅಕ+ಕ \equiv (ಅ+ಕ)^೨ ಮತ್ತು ಅ-ಕ \equiv (ಅ+ಕ)(ಅ-ಕ) ಇರುವ ಸಂಗತಿಯು ರಾಶಿಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವುದರಿಂದ ಅ+ಕ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು (ಅ+ಕ)^೨ (ಅ-ಕ) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದರಂತೆಯೇ ಅ+ಕ ಮತ್ತು ಅ+ಅಕ+ಕ ಇವುಗಳೆ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಅ+ಕ \equiv (ಅ+ಕ)(ಅ-ಅಕ+ಕ) ಮತ್ತು ಅ+ಅಕ+ಕ \equiv (ಅ+ಅಕ+ಕ)(ಅ-ಅಕ+ಕ) ಇವು ಗೊತ್ತಿವುದರಿಂದ ಅ-ಅಕ+ಕ ಇದು ಮ ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು (ಅ+ಕ)(ಅ+ಅಕ+ಕ) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಎಂದು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಗಳು ಇಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟವಿಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳೆ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು.

ಉ ೧. ಒಕ್ಷ+ಖಕ್ಷ+ಒಕ್ಷ+೭೦ ಮತ್ತು ಒಕ್ಷ+ಒಕ್ಷ+ಒಕ್ಷ-೭೫ ಇವುಗಳೆ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ.ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಪಡೆ ಎರಡನೇಯದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು, ಏಕೆಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕ-

ಗಣ ಜೈಜಿಕ ಜೇವೀಯ ರೂಪ್ಯವಿರುವದರಿಂದ ಕ್ಷ-೧ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿರು-
ವದು, ಅದುದರಿಂದ ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡುವಾ

$$\begin{aligned}
 & ೨ಕ್ಷ+೧೦ಕ್ಷ+೧೦ಕ್ಷ-೨೫ \\
 &= ೨ಕ್ಷ-೨ಕ್ಷ+೧೦ಕ್ಷ-೧೦ಕ್ಷ+೨೫ಕ್ಷ-೨೫ \\
 &= ೨ಕ್ಷ(ಕ್ಷ-೧)+೧೦ಕ್ಷ(ಕ್ಷ-೧)+೨೫(ಕ್ಷ-೧) \\
 &= (ಕ್ಷ-೧)(೨ಕ್ಷ+೧೦ಕ್ಷ+೨೫) \\
 &= (ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೨)
 \end{aligned}$$

ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ಷ-೧ ಈ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಮ. ಸಾ. ವಿ
ಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದ್ದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿ ಕ್ಷ+೫ ಮತ್ತು ೨ಕ್ಷ+೨ ಇವು-
ಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಗುಣಕವು ಇದ್ದಿರಬೇಕು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು
ಅಡ್ಡಿಯಿಲ್ಲ. ರಾಶಿಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ ಕ್ಷ+೫ ಈ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು
ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅವಕ್ಕನುಸಾರಿ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸುವಾ.

$$\begin{aligned}
 & ೨ಕ್ಷ+೫ಕ್ಷ+೧೦ಕ್ಷ+೨೦ \\
 &= ೨ಕ್ಷ+೨೦ಕ್ಷ+೨೫ಕ್ಷ+೧೦ಕ್ಷ+೧೦ಕ್ಷ+೨೦ \\
 &= ೨ಕ್ಷ(ಕ್ಷ+೫)+೨೫ಕ್ಷ(ಕ್ಷ+೫)+೧೦(ಕ್ಷ+೫) \\
 &= (ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೨೫ಕ್ಷ+೧೦) \\
 &= (ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೨)(೨ಕ್ಷ+೨)
 \end{aligned}$$

∴ (ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೨) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಮತ್ತು (ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೨)(೨ಕ್ಷ+೨) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡು
ಅಕ್ಷಾ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಅವುಗಳನ್ನು
ಕ್ರಮದಿಂದಲೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಯಾವಾಗಲೂ ಅನುಕೂಲವಿರುತ್ತದೆಂದಿಲ್ಲ.
ಅನೇಕ ಸಲ ಯಾವುದರ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು
ಸುಲಭವಿರುವದೋ ಅದರ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ. ನಂತರ ಅದರ ಯಾವ
ಅವಯವಗಳು ಇರುತ್ತವೆಯೆಂಬದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಉಳಿದವುಗಳ
ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಮುಕ್ತಿಸುವದು ಹೆಚ್ಚು ಇಷ್ಟವಾದದ್ದು.
ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಯಾವದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಮೊದಲ
ರಾಶಿ ಇರುವದೋ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆಯಬೇಕು. ಅನಂತರ

ಕ್ರಮವಾಗಿ ಉಳಿದ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದೊಂದು ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದರ ಸಮಾಪೇಷವಾಗುವ ಎಲ್ಲವೋ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಯವವ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವಿರುವದೋ ಅವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು.

ಉ. ೨. $೬ಅ + ೧೩ಅಕ + ೪ಗಅಕ + ೧೨ಕ$, $೨೦ಅ - ೨೨ಅಕ - ೮ಕ + ೬ಕ$ ಮತ್ತು $೧೬ಅಕ - ೫ಅಕ$ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ.ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಕೊನೆಯ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಿಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಬರೇಹ ಸುಲಭವಿರುವದೆಯದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

$$\begin{aligned} ೧೬ಅಕ - ೫ಅಕ &= ೨೨ಕ(೨ಅ - ೨೬ಕ) \\ &= ೨೨ಕ(೨ಅ - ೩ಕ)(೪ಅ + ೬ಅಕ + ೯ಕ); \end{aligned}$$

ಈ ಗುಣಕಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೂರೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರಬೇಕಾದರೆ ಅದು $೨ಅ - ೩ಕ$ ಇದೇ ಇರಬೇಕೆಯದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

$$\begin{aligned} ೬ಅ + ೧೩ಅಕ - ೪ಗಅಕ + ೧೨ಕ &= ೬ಅ - ೯ಅಕ + ೨೨ಅಕ - ೩೩ಅಕ - ೮ಅಕ + ೧೨ಕ \\ &= ೩ಅ(೨ಅ - ೩ಕ) + ೧೧ಅಕ(೨ಅ - ೩ಕ) - ೪ಕ(೨ಅ - ೩ಕ) \\ &= (೨ಅ - ೩ಕ)(೩ಅ + ೧೧ಅಕ - ೪ಕ) \\ &= (೨ಅ - ೩ಕ)(೮ಅ + ೭ಕ)(೩ಅ - ೪ಕ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ೨೦ಅ - ೨೨ಅಕ - ೮ಕ + ೬ಕ &= ೨೦ಅ - ೨೦ಅಕ - ೨ಅಕ + ೩ಅಕ - ೪ಅಕ + ೬ಕ \\ &= ೧೦ಅ(೨ಅ - ೩ಕ) - ೨ಕ(೨ಅ - ೩ಕ) - ೨ಕ(೨ಅ - ೩ಕ) \\ &= (೨ಅ - ೩ಕ)(೧೦ಅ - ೪ಕ - ೨ಕ) \\ &= (೨ಅ - ೩ಕ)(೨ಅ - ೪ಕ)(೫ಅ + ೨ಕ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ೨ಅ - ೩ಕ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು \\ ೨೨ಕ(೮ಅ + ೭ಕ)(೨ಅ - ೩ಕ)(೨ಅ - ೪ಕ)(೫ಅ + ೨ಕ) \\ (೪ಅ + ೬ಅಕ + ೯ಕ). ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೮.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ. (ಮೊದಲಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಹಿರುವುದು.)

೧. ವೌ + ವೌಪೌ + ಸೌ; ವೌ + ಸೌ.

೨. ಯೌ + ಲಯ + ೧೬; ಯೌ + ಲಯ + ೪.

೩. ರೌ — ೬ರ + ೧; ರೌ — ೪ರ + ೨.

೪. ನೌ — ೬೪; ನೌ — ೧೬ನೌ + ೨೫.

೫. ಓಮೌ — ೨೩; ಓಮೌ — ೨೧.

೬. ವೌ — ಸೌ; ವೌ — ೬ವೌಪೌ + ಸೌ.

೭. ನೌ — ೬೨೪; ನೌ — ೧೬ನೌ + ೨೫ — ೧೨೫.

೮. ಕ್ಷೌ + ೬ಕ್ಷೌ + ೧೧ಕ್ಷ + ೬; ಕ್ಷೌ + ೧೧ಕ್ಷೌ + ೨ — ೬ಕ್ಷ + ೨೪.

೯. ಲಕ್ಷೌ — ೨೦ಕ್ಷೌ — ೪ಕ್ಷ + ೨೦; ೬ಕ್ಷೌ — ೧೩ಕ್ಷೌ + ೧೦ಕ್ಷ.

೧೦. ಲಯೌ + ೨೪ಯೌಕ್ಷ + ೨೪ಯೌಕ್ಷ + ೨೪ಯೌಕ್ಷ;

೪ಯೌ + ೨ಯೌಕ್ಷ + ೪ಯೌಕ್ಷ.

೧೧. ಅಯೌ + ೪೦ಯ + ೧೦ + ೧೦ಕ್ಷ — ೯ಕ್ಷೌ;

ಅಯೌ + ೨೦ಯಕ್ಷ + ೯ಕ್ಷೌ + ೧೦ಯ + ೯ಕ್ಷ + ೨

೧೨ ಅೌ + ೨೪ೌ + ೧೨೫ಗೌ — ೨೦೨೪ಗ;

೨೨ೌ + ೨೦೨೪ಗ + ೫೦ಗೌ — ೨೪ೌ.

೧೩. ಅೌಪೌ — ೬೨೬೪ ; ಪೌ — ೨೨ಪ — ೨೪.

೧೪. ಲಕ್ಷೌ + ೬೪ಕ್ಷೌ + ೨೧೩ಕ್ಷ — ೧೨೪;

ಕ್ಷೌ + ೧೦ಕ್ಷೌ + ೨೩ಕ್ಷ + ೬೬.

೧೫. ಪೌ + ೯ಪೌ + ೮೧ : ಪೌ + ೧೨ಪ + ೨೨; ಪೌ + ೨೨.

೧೬. ೨ಕ್ಷೌ — ೨೦ಕ್ಷ + ೪೨ ; ೨ಕ್ಷೌ + ೬ಕ್ಷ — ೪೫; ೪ಕ್ಷೌ — ೨ಕ್ಷ ೧೪೦.

೧೭. ಯೌ — ೧೧೨ಯ + ೨೪೪ ; ೬ಯೌ — ೨೪೪; ೬ಯೌ — ೨೪೪.

ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಹೇಳಿ.

೧೮. ೨ಕ್ಷೌ — ೨೪ಕ್ಷ + ೨೦; ೨ಕ್ಷೌ — ೯ಕ್ಷ — ೨೦;

ಕ್ಷೌ — ೫ಕ್ಷ — ೧೪.

೧೯. ೬ಯಃ—೧೧ಯಕ್ಷ—೧೦ಕ್ಷಃ ; ೧೨ಯಃ—೧೩ಯಕ್ಷ—೧೪ಕ್ಷಃ ;
 ೮ಯಃ—೨೪ಯಕ್ಷ+೨೫ಯಃ.

೨೦. ಅಃ—೧೧ಅಃ+೨೪ಅಃ-೪೦ ; ಅಃ-೬ಅಃ+೬ ; ಅಃ-೬ಅಃ-೬ಅಃ+೬೦.

೨೧. ೨೪ಪಃ+೨೪ಪಃ—೧೯ಪಃ—೧೫ ; ೬ಪಃ+ಪಃ—೧೨ಪಃ+೫ ;
 ೨ಪಃ—ಪಃ—೨ಪಃ+೧ ; ೬ಪಃ+೧೩ಪಃ+೨ಪಃ—೫.

೩.

೪.೮. ಹಿಂದಿನ ಸಂಗ್ರಹಗಳೊಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಸಾಧಾರಣತಃ ಸುಲಭವಿದೆ. ಆದರೆ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಇಷ್ಟು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ತೆಗೆಯಲು ಬಾರದ ರಾಶಿಗಳು ಹಲವು ಸಾರೆ ನಮ್ಮೆದುರು ಬರುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ವಿವೇಚಿಸಿದ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮತ್ತು ಗುಣಕ ನಿಯಮಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಬಹಳವಾಗುವದು.

೮. ೧. ೧೨ಯಃ+೪೦ಯಃ+೧೩ಯಃ—೨೦ ಮತ್ತು ೬ಯಃ—೫ಯಃ—೨೧ಯಃ+೧೦ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ.

ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದ ನಂತರ ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹ-ಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ಶೂನ್ಯವಿರುವದರಿಂದ ಯ—೧ ಇದೊಂದು ಅದರ ಅವಯವವಿದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ,

$$\begin{aligned}
 & ೬ಯಃ+೫ಯಃ—೨೧ಯಃ+೧೦ \\
 & = ೬ಯಃ—೬ಯಃ+೧೧ಯಃ—೧೧ಯಃ—೧೦ಯಃ+೧೦ \\
 & = ೬ಯಃ(ಯ-೧)+೧೧ಯಃ(ಯ-೧)—೧೦(ಯ-೧) \\
 & = (ಯ-೧)(೬ಯಃ+೧೧ಯಃ-೧೦) \\
 & = (ಯ-೧)(೨ಯಃ+೫)(೩ಯಃ-೨)
 \end{aligned}$$

ಒಂದು ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿದನಂತರ ಉಳಿದ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಈಗ ಸುಲಭವಿರುವದು. ಏಕೆಂದರೆ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದ್ದರಿಂದ ೨ಯಃ+೫ ಮತ್ತು ೩ಯಃ-೨ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಅವಯವವು ಅದರಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು ಎಂದು ಅನುಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಬಹಿ ಇರುವದು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ೨ಯಃ+೫ ಮತ್ತು ೩ಯಃ-೨ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವದು.

$$\begin{aligned}
 & ೧೨ಯಿ + ೪೦ಯಿ + ೧೩ಯ - ೬೦ \\
 & = ೧೨ಯಿ + ೬೦ಯಿ + ೧೦ಯಿ + ೨೫ಯ - ೧೨ಯ - ೬೦ \\
 & = ೬ಯಿ(೨ಯ + ೫) + ೫ಯ(೨ಯ + ೫) - ೬(೨ಯ + ೫) \\
 & = (೨ಯ + ೫)(೬ಯಿ + ೫ಯ - ೬) \\
 & = (೨ಯ + ೫)(೬ಯ - ೨)(೨ಯ + ೨) \\
 & ೨. (೨ಯ + ೫)(೬ಯ - ೨) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು \\
 & (೨ಯ - ೧)(೨ಯ + ೫)(೬ಯ - ೨)(೨ಯ + ೨) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ಯಿ - ೬ಯಿ - ೬೬ಯಿ + ೬೨ಯ + ೨೪೦ ಮತ್ತು
ಯಿ + ೯ಯಿ - ೫ಯಿ - ೧೫೩ಯ - ೧೪೦ ಇವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು
ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ.

ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮತ್ತು
ಅದರಂತೆಯೇ ಏಕಮ ಘಾತ ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಣೆ ಒಂದೇ
(-೧೪೪) ಇದ್ದುದರಿಂದ ಯ + ೧ ಇದ್ದೊಂದು ಅನುಪಮಾನವು. ಅದರಂತೆ
ಮಂಡಿಸಲಾಗಿ,

$$\begin{aligned}
 & ಯಿ + ೯ಯಿ - ೫ಯಿ - ೧೫೩ಯ - ೧೪೦ \\
 & = ಯಿ + ೯ಯಿ + ೪ಯಿ - ೧೬ಯಿ - ೧೬ಯ - ೧೪೦ಯ - ೧೪೦ \\
 & = ಯಿ(ಯ + ೧) + ೪ಯಿ(ಯ + ೧) \\
 & \quad - ೧೬ಯ(ಯ + ೧) - ೧೪೦(ಯ + ೧) \\
 & = (ಯ + ೧)(ಯಿ + ೪ಯಿ - ೧೬ಯ - ೧೪೦).
 \end{aligned}$$

ಈಗ ಯಿ + ೪ಯಿ - ೧೬ಯ - ೧೪೦ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ
ಜೈಜಿಕ ಜೋಡಣೆ-೧೪೪. ಸಂಭವನೀಯ ಗುಣಕಗಳು ಯ - ೨, ಯ + ೨,
ಯ - ೪, ಯ + ೫, ಯ + ೫....೨. ಈ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ
ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇವುಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

(ಯ + ೪) ಈ ಗುಣಕವು ಸಂಭವಿಸುವದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಅದರೊಳಗಿನ
ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಣೆ ೫೦೦ - ೧೪೪ಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ.)

ಯ = ೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಜಲೆಯು - ೧೬೬ ಆಗುತ್ತದೆ.
ಮತ್ತು ಯ = -೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ - ೧೦ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ

ಯ—೨ ಮತ್ತು ಯ+೨ ಇವು ಅವಯವಗಳಲ್ಲ. ಯ=೪ ಎಂಬ ತಿಳಿವಳಿಕೆ
ಕೊಂಡರೆ ಮಾತ್ರ ಅದು ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಯ—೪
ಇದೊಂದು ಅವಯವವಿರುವದು. ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿ,

$$\text{ಯ}^2 + \text{೨ಯ}^2 - ೧೨ಯ - ೧೪೦$$

$$= \text{ಯ}^2 - ೪ಯ^2 + ೧೨ಯ^2 - ೪೨ಯ + ೨೪೦ - ೧೪೦$$

$$= \text{ಯ}^2(\text{ಯ} - ೪) + ೧೨ಯ(\text{ಯ} - ೪) + ೨೪೦(\text{ಯ} - ೪)$$

$$= (\text{ಯ} - ೪)(\text{ಯ}^2 + ೧೨ಯ + ೨೪೦)$$

$$= (\text{ಯ} - ೪)(\text{ಯ} + ೪)(\text{ಯ} + ೬)$$

$$\therefore \text{ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯು} = (\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} - ೪)(\text{ಯ} + ೪)(\text{ಯ} - ೬)$$

ಈಗ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದಿದ್ದುದರಿಂದ ಈ ಅವಯವ-
ಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಇಲ್ಲವೆ ದೊಡ್ಡ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುತರ-
ವಾಗಿ ಇರುವವು. ಯ+೧ ಇದು ಇಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯೂ
ಕೊನೆಯ ಪದ ೨೪೦ ಇದಕ್ಕೆ ೬ ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅದುದರಿಂದ
ಯ+೬ ಇದಾದರೂ ಇರಲಾರದು. ಯ-೪ ಮತ್ತು ಯ+೪ ಇವು
ಉಳಿದವು.

ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀದು ೨೬೦ ಇರುವದು.
ಅಂದ ಮೇಲೆ ಇವು ಗುಣಕಗಳಿರುವ ಸಂಭವಿದೆ. ಯ=೪ ಹಿಡಿದರೆ,
ರಾಶಿಯು = ೨೪೦ - ೧೯೨ - ೪೬೬ + ೨೨೨ + ೨೪೦ = ೦

\therefore ಯ-೪ ಇದು ಅವಯವವಿದೆ. ಯ= -೪ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ
ರಾಶಿಯು = ೬೨೪ + ೨೬೪ - ೯೦೦ - ೨೪೦ + ೨೪೦ = ೦

\therefore ಯ+೪ ಇದಾದರೂ ಅವಯವವಿದೆ.

$$\text{ಯ}^2 - ೨ಯ^2 - ೨೬ಯ^2 + ೬೨ಯ + ೨೪೦$$

$$= \text{ಯ}^2 - ೪ಯ^2 + \text{ಯ}^2 - ೪ಯ^2 - ೨೨ಯ^2 + ೧೨೨ಯ$$

$$- ೬೦ಯ + ೨೪೦$$

$$= \text{ಯ}^2(\text{ಯ} - ೪) + \text{ಯ}^2(\text{ಯ} - ೪) - ೨೨ಯ(\text{ಯ} - ೪)$$

$$- ೬೦(\text{ಯ} - ೪)$$

$$= (\text{ಯ} - ೪)(\text{ಯ}^2 + \text{ಯ}^2 - ೨೨ಯ - ೬೦)$$

$$\begin{aligned}
 &= (ಯ-೪)(ಯ+೫)(ಯ-೪)(ಯ-೨)(ಯ-೧)(ಯ-೬) \\
 &= (ಯ-೪)(ಯ+೫)(ಯ-೪)(ಯ-೨)(ಯ-೧)(ಯ-೬) \\
 &= (ಯ-೪)(ಯ+೫)(ಯ-೪)(ಯ-೨) \\
 &= (ಯ-೪)(ಯ+೫)(ಯ+೨)(ಯ-೬) \\
 \therefore (ಯ-೪)(ಯ+೫) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು (ಯ+೧) \\
 (ಯ-೬)(ಯ+೫)(ಯ+೨)(ಯ+೨)(ಯ-೬) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.
 \end{aligned}$$

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ರೀತಿ.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ-

೧. ಪೌ + ಗೌಪ + ಲೌಪ + ಉ ; ಪೌ + ಗೌಪ + ಲೌಪ - ಗೌಪ.
೨. ಮೌ - ಲೌಪ - ಲೌಪ + ಉ ; ಮೌ - ಲೌಪ + ಉ.
೩. ನೌ + ಗೌನೌ + ಉನೌ + ಉ ; ನೌ + ಗೌನೌ + ಗೌನೌ - ಉ.
೪. ಲೌಪ - ಲೌಪ + ಗೌಪ + ಉ ; ಲೌಪ - ಲೌಪ + ಗೌಪ - ಉ.
೫. ಪೌ - ಲೌಪ - ಗೌಪ + ಉ ; ಪೌ - ಪೌ - ಗೌಪ + ಉ.
೬. ಲೌಪ + ಲೌಪ - ಲೌಪ + ಉ ; ಲೌಪ - ಗೌಪ + ಲೌಪ + ಉ.
೭. ಲೌಪ - ಲೌಪ - ಲೌಪ + ಗೌಪ ; ಲೌಪ + ಗೌಪ - ಲೌಪ + ಉ.
೮. ಲೌಪ + ಲೌಪ + ಯ - ಉ ; ಲೌಪ + ಲೌಪ - ಯ + ಗೌಪ.
೯. ಲೌಪ - ಲೌಪ - ಲೌಪ + ಗೌಪ ; ಲೌಪ + ಲೌಪ + ಲೌಪ + ಉ.
೧೦. ಲೌಪ + ಲೌಪ - ಗೌಪ - ಉ ; ಲೌಪ - ಲೌಪ + ಲೌಪ + ಉ.
೧೧. ಲೌಪ + ಲೌಪ - ಗೌಪ + ಉ ; ಲೌಪ + ಗೌಪ - ಲೌಪ - ಉ.
೧೨. ಲೌಪ - ಲೌಪ - ಗೌಪ + ಉ ; ಲೌಪ - ಗೌಪ + ಲೌಪ + ಉ.

ಆ.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮಹತ್ವದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು.

೪-೯. ಈ ಮತ್ತು ೧೦ ಮತ್ತು ೧೧ ನೇ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಜಕ ೫, ೧೦, ೧೫ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲಿಗೆ ಆವರಣವಿದೆ. ೯ ಕೆಲವು ವಿಭಜಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ೬. ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ೫ ಇದು ಅವಯವವಿದ್ದು ಕೂಡುವುದು.

ನಾವು ಬೇರೊಂದು ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ೮. ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೮೨, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೨೪. ಈ ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ೮ ಇದು ಗುಣಕವಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಅಂತರದ ಒಂದು ಗುಣಕ ವರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸರ್ವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಲು ನಮಗೆ ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಮ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ತ=ಮಕ ಮತ್ತು ದ=ಮಗ (ಇಲ್ಲಿ ಕ ಮತ್ತು ಗ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತ ಮತ್ತು ದ ಗಳಿಗೆ ಮ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗ ಲಬ್ಧಗಳಿವೆ)

∴ ತ + ದ = ಮಕ + ಮಗ = ಮ(ಕ + ಗ), ಮತ್ತು

ತ - ದ = ಮಕ - ಮಗ = ಮ(ಕ - ಗ).

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೧. ∴ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಅದು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಅಂತರದ ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವು ಹಲವು ಸಾರಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಿರುವ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಮರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದರಲ್ಲಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಉ. ೧. ೩ಯೆ^೨ - ೩೨ಯೆ^೨ + ೪೪ಯೆ + ೮೦ ಮತ್ತು ೩ಯೆ^೨ - ೩೧ಯೆ^೨ + ೫೦ಯೆ + ೪೮ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು

ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು = ೩ಯೆ^೨ - ೪೪ಯೆ - ೨೦

= ೨(೩ಯೆ^೨ - ೨೨ಯೆ - ೧೦)

= ೨(ಯೆ - ೮)(೩ಯೆ + ೨)

೨ ಇದು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕವಿಲ್ಲವೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿಲ್ಲದೆ ಅದು ಯ—೮ ಇರಬಹುದೆಂದು, ಇಲ್ಲವೆ ೨ಯ+೨ ಇರಬಹುದು. ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡೂ ಇರಬಹುದು. ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ನೋಡುವನಾ.

೨ಯ^೨—೨೨ಯ+೨೨ಯ+೨೦

= ೨ಯ^೨—೨೨ಯ^೨—೧೨ಯ+೧೦೨ಯ—೧೦೨ಯ+೨೦

= ೨ಯ(ಯ—೮)—೧೨ಯ(ಯ—೮)—೧೦(ಯ—೮)

= (ಯ—೮) ೨ಯ—೧೨ಯ—೧೦

= (ಯ—೮)(ಯ—೮)(೨ಯ+೨)

೨ಯ^೨—೨೧೨ಯ+೧೦೨ಯ+೨೦

= ೨ಯ^೨—೨೨ಯ^೨—೨೨ಯ^೨+೧೨೨—೨೨ಯ+೨೦

= ೨ಯ^೨(ಯ—೮)—೨೨ಯ(ಯ—೮)—೨(ಯ—೮)

= (ಯ—೮)(೨ಯ^೨—೨೨ಯ—೨)

= (ಯ—೮)(ಯ—೨)(೨ಯ+೨)

∴(ಯ—೮)(೨ಯ+೨) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು

(ಯ—೮)(ಯ—೨)(ಯ—೨)(೨ಯ+೨) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಉ. ೨. ೨೨೨೨+೨೨೨೨+೨೨೨೨—೨೨ ಮತ್ತು ೨೨೨೨—೨೨೨೨—೨೨೨೨+೨೨ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ರಾಶಿಗಳ ಜೇರ್ವಿಜನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪದವು ಜೋಷಣಾ ಗುಣವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ರಾಶಿಗಳ ಜೇರ್ವಿಜು = ೨೨೨೨+೨೨೨೨+೨೨೨೨

= ೨೨೨(೨೨೨೨+೨೨೨೨+೨)

= ೨೨೨(೨೨೨+೨)(೨೨೨+೨)

೨ ಮತ್ತು ೨೨ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂಲರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ೨೨೨+೨ ಇದು ಇರಬಹುದೇ? ನೋಡಲಿಸ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೇರ್ವಿಜು ೨೨೨ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ—೨೨ ಇದೆ. ೨೨೨+೨ ಇದರೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೇರ್ವಿಜಿನಿಂದ (೨೨ ರಿಂದ) ಅವಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅದು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕ

ವಿರಲಾರದು. $೪೫ + ೭$ ಇದು ಉಳಿಯಿತು. ಇದರೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ (೧೧ರಿಂದ) ೧೫೪ ಕ್ಕೆ ಮತ್ತು — ೪೪ ಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುವರಿಂದ ಅದೇ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರಬಹುದು. ಅವಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿ,

$$೨೪೫ + ೯೪೫ + ೭೧೫ = ೧೨೫$$

$$= ೨೪೫ + ೪೫೫ + ೫೫೫ + ೮೧೫ - ೨೦೫ - ೧೨೫$$

$$= ೬೫(೪೫ + ೭) + ೧೨೫(೪೫ + ೭) + ೫(೪೫ + ೭)$$

$$= (೪೫ + ೭)(೬೫ + ೧೨೫ - ೫)$$

$$= (೪೫ + ೭)(೨೫ - ೧)(೨೫ + ೫)$$

$$೪೫ - ೬೦೫ - ೫೭೫ + ೧೨೫$$

$$= ೪೫ + ೧೨೫ - ೪೫೫ - ೭೭೫ + ೨೦೫ + ೧೨೫$$

$$= ೨೫(೪೫ + ೭) - ೧೨೫(೪೫ + ೭) + ೫(೪೫ + ೭)$$

$$= (೪೫ + ೭)(೨೫ - ೧೨೫ + ೫)$$

$$= (೪೫ + ೭)(೨೫ - ೧)(೫ - ೫)$$

$$\therefore ೪೫ + ೭ ಇದು ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು (೪೫ + ೭)(೪೫ - ೧)$$

$$(೨೫ + ೫)(೨೫ - ೧)(೫ - ೫) ಇದು ಲ.ಸಾ.ವಿ.$$

೪.೧೦. ಮೇಲೆ ಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದ ಒಂದೇ ಇರುವದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಅದು ಲೋಪವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿಯ ಮತ್ತು ಬೇರೀಜಿನ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ೧೭೭೭ — ೪೪೭ + ೪೭೭ — ೧೨೭ ಮತ್ತು ೪೭೭ — ೨೭೭ — ೧೭೭ + ೨೦ ಇಂಥ ಜೋಡಿ ಇದ್ದರೆ ಏನು ಮಾಡುವದು? ಇಲ್ಲಿ ರಾಶಿಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಯಾವುದೇ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದಿಲ್ಲ.

೧೫ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ೩ ಇರುವದು. ೧೫ ರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ೯ ರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಏನು ಕಂಡು ಬರುವದು? ೧೫ ರ ಮುಮ್ಮಡಿಯಲ್ಲಿ ೯ ನಾಲ್ಕಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ೨೧ ಆಗುವದು.

೩ ಇದು ಲಗ. ರ ಗುಣಕವಿದೆ. ವಜಾಬಾಕಿಯು ೯. ೩ ಇದು ೯ ರ ದಾದರೂ ಗುಣಕವಿರುವದು.

೩೨ ಮತ್ತು ೫೭ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಶೇಗಮಕೊಳ್ಳುವಾ. ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ೮. ೫೭ ರ ಇಮ್ಮಡಿ ಮತ್ತು ೩೨ ರ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇವುಗಳೇ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಆದು ೨೦೮ ಆಗುವದು. ೮ ರದು ಆದರಲ್ಲಿ ಗುಣಕ ಎದೆ. ವಜಾಬಾಕಿಯು ೧೩. ಇದರಲ್ಲಿಯೂ ೮ ಇದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕಂಡು ಬರುವವು(ಸಂದರೆ) ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಆದು ಮೊದಲನೆಯದರ ಯಾವುವೇ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಯಾವುವು, ಪಟ್ಟಿ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಲ್ಲಿ ದುಟ್ಟು ವಜಾಬಾಕಿಯಲ್ಲಿ ಸದಾ ಇರುವದು.

ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಮು ಇದು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ತ=ಮಕ ಮತ್ತು ದ=ಮಗ (ತ ಮತ್ತು ಗ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತ ಮತ್ತು ದ ಗಳನ್ನು ಮ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗವು ಗಳು).

∴ ಚತ=ಚಮಕ ಮತ್ತು ಜದ=ಜಮಗ (ಚ ಮತ್ತು ಜ ಇವು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವವು).

∴ ಚತ+ಜದ ಚಮಕ+ಜಮಗ ಮು (ಚಕ+ಜಗ) ಮತ್ತು ಚತ ಜದ ಚಮಕ ಜಮಗ ಮು (ಚಕ-ಜಗ). ಇದರ ಕರ್ಮವೇ(ಸಂದರೆ). ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಅದು ಒಂದು ರಾಶಿಗೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ರಾಶಿಗೆ

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೨. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ದಾಗೂ ಅವುಗಳ ಅಂತರದ ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಮೊದಲನೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಎರಡನೇಯದರ ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಬರುವದು. ಚತ=ಜ=೧ ಬಂದರೆ ಹಿಡಿದರೆ ಎರಡನೇ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಮೊದಲೆಯುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಜೋಡಿಯ ಸಾದಾರಣ ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯುವವರಲ್ಲಿ ಮಾಡೋಣ.

ಉ. ೩. ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ಒಂದಾದ ಗುಣಿಸಿ ಆ ಗುಣಾಕಾರದೊಳಗಿಂದ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಆ ಪದವು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

$$೩ \times \text{ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯು} - \text{ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿ} = ೧೨೮ - ೨೪೮ - ೫೧೮ + ೯೦$$

$$= (೧೨೮ - ೨೪೮ + ೯೦ - ೫೧೮)$$

$$= ೨೦೮ - ೧೦೦೮ + ೧೦೮$$

$$= ೫(೨೦೮ - ೨೦೮ + ೨೧)$$

$$= ೫(೨೮ - ೩)(೨೮ - ೩)$$

೫ ಇದು ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಲ್ಲ. ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು ೧೫ ಮತ್ತು ೩೦ ಇರುವವರಿಂದ ೨೮ - ೩ ಇದಾದರೂ ಗುಣಕವಿರುವದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ೨೮ + ೩ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿರುವದು. ರಾಶಿಯನ್ನು ಮೂಡಿಸಿ ನೋಡುವಾ.

$$೧೨೮ - ೨೪೮ + ೯೦ - ೫೧೮$$

$$= ೧೨೮ - ೧೪೮ - ೨೬೮ + ೩೯೮ + ೧೦೮ - ೧೫$$

$$= ೬೮(೨೮ - ೩) - ೧೩೮(೨೮ - ೩) + ೫(೨೮ - ೩)$$

$$= (೨೮ - ೩)(೬೮ - ೧೩೮ + ೫)$$

$$= (೨೮ - ೩)(೨೮ - ೧)(೬೮ - ೫)$$

$$೬೮ - ೫ - ೧೩೮ + ೧೦ = ೬೮ - ೬೮ - ೨೮ + ೩೮ - ೨೦೮ + ೩೦$$

$$= ೨೮(೨೮ - ೩) - ೫(೨೮ - ೩) - ೧೦(೨೮ - ೩)$$

$$= (೨೮ - ೩)(೨೮ - ೮ - ೧೦)$$

$$= (೨೮ - ೩)(೨೮ - ೫)(೮ + ೨)$$

$$\therefore ೨೮ - ೩ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು (೮ + ೨)(೨೮ - ೫)$$

$$(೨೮ - ೩)(೨೮ - ೧)(೬೮ - ೫) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.$$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೂ ಬರುತ್ತಿತ್ತು.

ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಸ್ವರವನ್ನು ಲೋಪವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & ೨ \times \text{ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿ} + \text{ಎರಡನೇ ರಾಶಿ} \\
 &= ೨೪೮೩ - ೪೮೮೩ + ೯೮೮ - ೪೦ + ೪೮೩ - ೪೮೩ - ೧೭೩ + ೪೦ \\
 &= ೨೪೮೩ - ೯೭೮೩ + ೪೧೬ \\
 &= ೮(೨೮-೨)(೧೪೮-೨೭) \\
 &= ೮(೨೮-೨)(೧೪೮-೨೭)
 \end{aligned}$$

ಈ ಇದು ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ೧೫ ಮತ್ತು ೪೦ ಇವುಗಳಿಗೆ ೨೭ ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ೨೮-೨ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿರುವುದೆಂದು ಅನುಮಾನ ಹೊರಡುತ್ತದೆ.

೪.೧೧. ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಎಲ್ಲ ಗುಣಕಗಳ ಸಮಾಪೇಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವುದು ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಾವು ಸಿದ್ಧಮಾಡಬಹುದು.

ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮು ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಮತ್ತು ಲ ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇದ್ದರೆ ತ ≡ ಮಕ ಮತ್ತು ದ ≡ ಮಗ (ಕ ಮತ್ತು ಗ ಇವು ತ ಮತ್ತು ದ ಗಳಿಗೆ ಮು ವಿಂದ ಭಾಗವಾಗಿ ಒಂದು ಭಾಗವಿವುಗಳು).

ಈಗ ಮು ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಕ ಮತ್ತು ಗ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಗುಣಕಗಳಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಮಕಗ. ಲ. - ಮಕಗ, ಅಂದರೆಯೇ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಇದು ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೨. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೪೦. ೨ ಇದು ೪೦ ರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ೨೨ ಮತ್ತು ೨೩ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೮, ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೨೩೪. ೮ ಇದು ೨೩೪ ರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ಆಯ ಮತ್ತು ಕಯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಅಕಯ. ಯ ಇದು ಅಕಯದ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೩. ಯಾವದೇ ರಾಶಿಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯಲ್ಲಿ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೧೨. \therefore ತ \equiv ಮಕ, ದ \equiv ಮಕ, ಮತ್ತು ಲ \equiv ಮಕಗ,
 \therefore ತ \times ದ \equiv ಮಕ \times ಮಕ
 \equiv ಮಕಗ \times ಮ
 \equiv ಲ \times ಮ | \therefore ತದ = ಲಮ

ಅಂದರೆ ಯಾವದೇ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಅವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ. ನೋದಲನೇ ರಾಶಿ \times ಎರಡನೇ ರಾಶಿ \equiv ಲ. ಸಾ. ವಿ. \times ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೪. ಂಷ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೩ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೪೫. \therefore ಂಷ \times ೯ = ೦೩೫; ೩ \times ೪೫ = ೦೩೫; ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಲ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೨೪. ೩ \times ೫ = ೦೨೪; ೪ \times ೨೪ = ೦೨೪. ಆಯ ಮತ್ತು ಕಯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಆಕಯ ಆಯ \times ಕಯ = ಆಕಯ; ಯ \times ಆಕಯ = ಆಕಯ.

ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. (ಇಲ್ಲಿವೇ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ). ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಂಗತಿಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದೂ ಮೂರು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ನಾಲ್ಕನೆಯದನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಯಾವಕಂದರೆ ಅವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮುಂದಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಇಷ್ಟರಾಶಿಯು = $\frac{\text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿ}}$

ಲ. ಸಾ. ವಿ. = $\frac{\text{ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.}}$

ಮ. ಸಾ. ವಿ. = $\frac{\text{ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}{\text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}$

$$\text{ತದ=ಲಸು} \quad \therefore \quad \text{ಲ} = \frac{\text{ತದ}}{\text{ಮ}} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \text{ಮ} = \frac{\text{ತದ}}{\text{ಲ}}$$

ಉ.ಇ. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\text{ಅಯ}+೫$ ಮತ್ತು $\text{ಅಯ} - ೧$ ಅಯ - ೨ ಅಯ + ೧ ಇದ್ದು ಒಂದು ರಾಶಿಯು $\text{ಅಯ}+೨$ ಅಯ - ೫ ಇಷ್ಟೆ ಬೇರೆ ರಾಶಿಯು ಯಾವುದು ?

ಇಂಥ ಪ್ರಕಾರದ ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮೊಟ್ಟೆಗೆ ಬರಬೇಕೆಂದು ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಇವರ ಸಹವಾಗಿ ಅದೇ ಬರಬೇಕು ಅಥವಾ ಸಹಜವಾಗಿ ಎಂಬುವದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇವುಗಳ ಗುಣಕವಿರುವದು. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಗುಣಕವಿರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಸಾಸ್ರ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕ ಫಲಕವನ್ನು ಮಾಡುವಾ, ತರುವಾಯ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಗುಣಕ ಫಲಕವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$$\begin{aligned} \text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿಯು} &= \text{ಅಯ} + ೫ - ೫ \\ &= (\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೧) \\ \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.} &= \text{ಅಯ} - ೧ - \text{ಅಯ} - ೨ - \text{ಅಯ} + ೧ \\ &= \text{ಅಯ} + ೧ - \text{ಅಯ} - ೨ - \text{ಅಯ} + ೧ \\ &= \text{ಅಯ}(\text{ಅಯ} + ೫) - \text{ಅಯ}(\text{ಅಯ} + ೫) + ೨(\text{ಅಯ} + ೫) \\ &= (\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೨) - \text{ಅಯ} + ೨ \\ &= (\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೧)(\text{ಅಯ} - ೨) \\ \therefore \text{ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯು} &= \frac{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿ.}} \\ &= \frac{(\text{ಅಯ} + ೫) \times (\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೧)(\text{ಅಯ} - ೨)}{(\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೧)} \\ &= (\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೨) \\ &= \text{ಅಯ} - ೨ - ೧ \end{aligned}$$

[* ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬರೆದಂತೆ ಕೊಡುವದನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ವಿಸ್ತಾರವಿರುವ ಬರೆಯಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಆದನ್ನು ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಡಲು ಏನೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ]

$$\begin{aligned}
 &= (x-2)(2x^2-4x^2+2x^2+3x^2-4x^2+2x) \\
 &= (x-2)(2x^2(2x-1)-4x^2(2x-1)-1(2x-1)); \\
 &= (x-2)(2x^2-1)(2x^2-4x^2-1) \\
 &= (x-2)(2x^2-1)(2x^2+1)(2x-1)
 \end{aligned}$$

ಈಗ $(x-2)(2x^2-1)$ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಅದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಇರಲೇಬೇಕು. ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದರೆ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯಲ್ಲಿ $2x^2+1$ ಮತ್ತು $2x-1$ ಇವೆರಡು ಅವಯವಗಳೂ ಉಳಿಯುವವು. ರಾಶಿಗಳು ಪ್ರಕೋಟಕವಿವೆಯೆಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ $2x^2-1$ ಈ ಅವಯವವು ಒಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $2x+1$ ಇದು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಅದುದರಿಂದ ಇಕ್ಕೆ ರಾಶಿಗಳು $(x-2)(2x^2-1)(2x^2+1)$ ಮತ್ತು $(x-2)(2x^2-1)(2x-1)$.

ಆದ್ದು ಮತ್ತು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೀತಿ : ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಅವಯವವಿರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ $2x^2$ ಕ್ಕೆ $2x^2$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ $2x^4$, ಮತ್ತು 1 ಕ್ಕೆ -1 ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ -1 ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು $-4x^2$ ಮತ್ತು $2x^2$ ಗಳು ಗುಣಾಕಾರವು $-2x^2$. ಇದನ್ನು $-2x^2$ ಒಡಲಾಗಿರು ಕಳೆದರೆ ಬರುವ ರೇಷು $2x^2$, ಇದಕ್ಕೆ $2x^2$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಒಂದ ಸಾಕಲವು -1 ಕ್ಕೆ ಬರುವದು, ಅದುದರಿಂದ

$$\begin{aligned}
 &2x^4-2x^2+2x^2-4x^2-1 \\
 &= (2x^2-4x^2+2x)(2x^2-4x^2-1) \\
 &\quad [ಬಾಯಿಯಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬೇಕು.] \\
 &= (2x^2-4x^2+2x)(2x^2+1)(2x-1)
 \end{aligned}$$

∴ ಇಕ್ಕೆ ರಾಶಿಗಳು $(2x^2-4x^2+2x)(2x^2+1)$ ಮತ್ತು $(2x^2-4x^2+2x)(2x-1)$.

ಉ. ೭. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $2x-1$ ಮತ್ತು $2x+1$ ಮತ್ತು $2x-1$ ಮತ್ತು $2x+1$ ಇವು ಒಂದು ರಾಶಿಯು $2x-1$ ಮತ್ತು $2x+1$ ಇವು ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ಹೇಳಿದೆ.

ನಂ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಸ್ವಭವವನ್ನು ಮಾಡುವುದು ರಚ್ಯವಾದುದು.

$$\begin{aligned}
 & \text{೧೨ಯಃ} - ೨೨ಯಃ - ೧೨ಯಃ + ೧೦ \\
 & = ೧೨ಯಃ - ೩೦ಯಃ + ೨೨ಯಃ - ೫ಯಃ - ೪ಯಃ + ೧೦ \\
 & = ೬ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) + ೨೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) - ೨(೨ಯಃ - ೫) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೬ಯಃ + ೨೨ಯಃ - ೨) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧)(೩ಯಃ + ೨)
 \end{aligned}$$

ಈ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳು ತಿಳಿದ ನಂತರ ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಯ ಗುಣ-ಸ್ವಭವವನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಸುಲಭವಿದೆ.

$$\begin{aligned}
 & \text{೪೨ಯಃ} - ೧೬ಯಃ - ೨೨ಯಃ - ೧೧೬ಯಃ + ೫೩ಯಃ + ೩೦ \\
 & = ೪೨ಯಃ - ೧೨೦ಯಃ + ೧೦೪ಯಃ - ೨೦೦ಯಃ + ೩೬೨ಯಃ - \\
 & \quad ೯೦ಯಃ - ೨೬ಯಃ + ೬೫ಯಃ - ೧೨ಯಃ + ೩೦ \\
 & = ೨೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) + ೫೩ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) + \\
 & \quad ೧೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) - ೧೩೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) - ೬(೨ಯಃ - ೫) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨೨ಯಃ + ೫೩ಯಃ + ೧೨ಯಃ - ೧೩೨ಯಃ - ೬) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫) \\
 & (೨೨ಯಃ - ೧೩೨ಯಃ + ೬೫ಯಃ - ೩೨ಯಃ + ೫೦ಯಃ - ೨೫ಯಃ + ೧೨ಯಃ - ೬) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫) \{ ೧೩೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೧) + ೩೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೧) + \\
 & \quad ೨೫ಯಃ(೨ಯಃ - ೧) + ೬(೨ಯಃ - ೧) \} \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧)(೧೩೨ಯಃ + ೩೨ಯಃ + ೨೫ಯಃ + ೬) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧) \\
 & \quad (೧೩೨ಯಃ + ೨೨ಯಃ + ೨೨ಯಃ + ೧೬ಯಃ + ೯ಯಃ + ೬) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧) \{ ೪೨ಯಃ(೩ಯಃ + ೨) + ೨೨ಯಃ(೩ಯಃ + ೨) \\
 & \quad + ೩(೩ಯಃ + ೨) \} \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧)(೩ಯಃ + ೨)(೪ಯಃ + ೨ಯಃ + ೩) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧)(೩ಯಃ + ೨)(೨ಯಃ + ೩)(೨ಯಃ + ೧)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಈಗ ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯು} &= \frac{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿ}} \\ &= \frac{(ಅಯ-೫) \times (ಅಯ-೫)(ಅಯ-೧)(ಅಯ+೨)(ಅಯ+೩)(ಅಯ+೧)}{(ಅಯ-೫)(ಅಯ-೧)(ಅಯ+೨)} \\ &= (ಅಯ-೫)(ಅಯ+೩)(ಅಯ+೧). \end{aligned}$$

ಶ್ರೀಘ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೀತಿ : ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯು ಅವಯವವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ೧೨ಯ^೪ ಮತ್ತು ೧೦ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೪ಯ^೪ ಮತ್ತು ೩ ಇವುಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ೪೮ಯ^೪ ಮತ್ತು ೩೦ ಬರುವವು, ಮತ್ತು ೪ಯ^೪ ಮತ್ತು —೨೮ಯ^೪ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ —೧೦೨ಯ^೪, ಇದನ್ನು —೧೬ಯ^೪ ದೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದು ಬರುವ ಶೇಷವು ೯೬ಯ^೪, ಇದಕ್ಕೆ ೧೨ಯ^೪ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ೮ಯ^೪ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ

$$\begin{aligned} & ೪೮ಯ^೪ — ೧೬ಯ^೪ — ೨೮ಯ^೪ — ೧೦೨ಯ^೪ + ೫೩ಯ^೪ + ೩೦ \\ &= (೧೨ಯ^೪ — ೨೮ಯ^೪ — ೯ಯ^೪ + ೧೦)(೪ಯ^೪ + ೮ಯ^೪ + ೩) \\ & \quad [ಬಾಯಿಯಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬೇಕು.] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಈಗ ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯು} &= \frac{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿ}} \\ &= \frac{(ಅಯ-೫)(೧೨ಯ^೪ — ೨೮ಯ^೪ — ೯ಯ^೪ + ೧೦)(೪ಯ^೪ + ೮ಯ^೪ + ೩)}{೧೨ಯ^೪ — ೨೮ಯ^೪ — ೯ಯ^೪ + ೧೦} \\ &= (ಅಯ-೫)(೪ಯ^೪ + ೮ಯ^೪ + ೩). \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೧. ಕ್ಷ^೪ + ೪ಕ್ಷ^೪ — ೧೧ಕ್ಷ^೪ — ೩೦; ೨ಕ್ಷ^೪ — ೩ಕ್ಷ^೪ — ೫೯ಕ್ಷ^೪ + ೩೦.
೨. ೧೨ಪ^೪ — ೨೮ಪ^೪ + ೧೭ಪ^೪ — ೩; ೧೨ಪ^೪ + ೮ಪ^೪ — ೪೯ಪ^೪ + ೧೫.
೩. ೨೦ಪ^೪ + ೭ಪ^೪ — ಪ — ೨; ೧೦ಪ^೪ — ೨೪ಪ^೪ + ೨೩ಪ^೪ — ೬.
೪. ೮ಯ^೪ ೬೨ಯ^೪ + ೭೯ಯ^೪ + ೩೨ಯ^೪ — ೧೨;

$$೮ಯ^೪ — ೫೪ಯ^೪ + ೮೧ಯ^೪ + ೩೧ಯ^೪ — ೧೨.$$

೫. $೫ಕ್ಷೃ + ೧೨ಕ್ಷೃ - ೪೪ಕ್ಷೃ + ೧೪೦ಕ್ಷೃ - ೪೮;$

$೪ಕ್ಷೃ - ೯ಕ್ಷೃ - ೪೯ಕ್ಷೃ + ೬೬ಕ್ಷೃ + ೭೨.$

೬. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ
 $೨೫ಕ್ಷೃ + ೨೦ಕ್ಷೃ + ೪$ ಮತ್ತು $೨೫ಕ್ಷೃ + ೨೦ಕ್ಷೃ - ೨೧ಕ್ಷೃ -$
 $೨೦ಕ್ಷೃ - ೪$ ಇದ್ದು ಒಂದು ರಾಶಿಯು $೨೫ಕ್ಷೃ + ೪೫ಕ್ಷೃ + ೨೪ಕ್ಷೃ + ೪$
 ಇದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯು ಯಾವದು?

೭. ಮೂರು ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು ಯು—೫ ಇದ್ದು
 ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯು, ಯು—೨ಯು—೨೫ಯು+೨೬ಯು+೧೨೦
 ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು?

೮. ಮೂರು ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು, ೩೫—೧ ಇದ್ದು
 ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯು, ೮೧ನು—೪೫ನು+೪ ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು
 ಯಾವವು?

೯. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೧೦ನು+೧೧ನು—೬
 ಇದ್ದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೧೦೦ನು—೨೪೧ನು+೩೬ ಇದ್ದರೆ ಆ
 ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು?

೧೦. ಮೂರು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೮ಯು—೧೮ಯು—೫
 ಇದ್ದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೩೨ಯು—೮೦ಯು—೨೯೦ಯು+
 $೭೨೫ಯು+೧೮ಯು-೪೫$ ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು?

೧೧. ಪಯು—೨೧ಯು+೪೫ಯು+ಮ ಮತ್ತು ೨ಪಯು—೪೫ಯು+
 $೧೨೩ಯು-ಮ$ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು—೭ ಇದ್ದರೆ
 ಪ = ?, ಮ = ?

೧೨. ೭ಯು+೨ಯು+ಕಯು+೧೦ ಮತ್ತು ಪಯು—೨೭ಯು+
 $೭೫ಯು+ಮ$ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು—೩ಯು+೨ ಇದ್ದರೆ
 ಅ = ?, ಕ = ?, ಪ = ?, ಮ = ?.

ಐದನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

ಜಿ.೧. ಪೈಪಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಗುರುತು ಹೋದ ವರ್ಷ-
ಪಲ್ಲಿಯೇ (ಭಾಗ ೨. ಪು. ೧೦೧-೨೦೦) ನಮಗೆ ಅಗಿರುತ್ತವೆ. ಇಂದು ಈಗ
ಮೊದಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಉಪಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಅದೇ ವಿಷಯದ
ಮುಂದಿನ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

೧.

ಜಿ.೨. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ-
ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ. ಅದುವರಿಂದ ಅವುಗಳ
ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಭಾಗಿಸಿ ಅಂದರಿಯೇ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ
ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸಂಕ್ಷೇಪ-
ವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು ಎಂಬ ನಾವು ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ
ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\text{ಉ. ೧.} \quad \frac{೨೨+೪೨}{೨೨+೪೨} = \frac{೨(೨+೨೨)}{೨(೨+೨೨)} = \frac{೨+೨೨}{೨+೨೨}$$

$$\text{ಉ. ೨.} \quad \frac{೩೨+೨೨}{೩೨+೨೨} = \frac{೩(೨+೨೨)}{೩(೨+೨೨)} = \frac{೩}{೩}$$

$$\text{ಉ. ೩.} \quad \frac{೨೨+೪೨}{೨೨+೪೨} = \frac{೨೨(೨+೨೨)}{೨೨(೨+೨೨)} = \frac{೨+೨೨}{೨+೨೨}$$

$$\text{ಉ. ೪.} \quad \frac{೨೨-೪೨}{೨೨-೪೨} = \frac{(೨+೨೨)(೨-೨೨)}{(೨+೨೨)(೨-೨೨)} = \frac{೨-೨೨}{೨-೨೨}$$

$$\text{ಉ. ೫.} \quad \frac{೨೨+೪೨}{೨೨+೪೨} = \frac{೨೨+೪೨}{೨೨+೪೨}$$

$$= \frac{(೨೨+೪೨)(೨೨-೪೨+೪೨)}{(೨೨-೪೨+೪೨)(೨೨+೪೨+೪೨)}$$

$$= \frac{೨+೪೨}{೨+೪೨+೪೨}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೧.} \quad & \frac{೧೦ಯಃ - ೨ಯಃ - ೨೭}{೨೦ಯಃ - ೧೧ಯಃ - ೪೫} \\
 & = \frac{(೨ಯ + ೨)(೫ಯ - ೯)}{(೪ಯ + ೫)(೫ಯ - ೯)} = \frac{೨ಯ + ೨}{೪ಯ + ೫} \\
 \text{ಉ. ೨.} \quad & \frac{೪ಅಃ - ೯ಕಃ - ೧೨ಅ + ೧೨ಕ + ೫}{೮ಅಃ - ೨೪ಅಕ + ೧೮ಕಃ - ೮ಅ + ೧೨ಕ + ೨}
 \end{aligned}$$

ಇದಕ್ಕೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & \frac{೪ಅಃ - ೯ಕಃ - ೧೨ಅ + ೧೨ಕ + ೫}{೮ಅಃ - ೨೪ಅಕ + ೧೮ಕಃ - ೮ಅ + ೧೨ಕ + ೨} \\
 & = \frac{(೪ಅಃ - ೧೨ಅ + ೯) - (೯ಕಃ - ೧೨ಕ + ೪)}{(೮ಅಃ - ೨೪ಅಕ + ೧೮ಕಃ - ೮ಅ + ೧೨ಕ + ೨)} \\
 & = \frac{(೨ಅ - ೨)ಃ - (೨ಕ - ೨)ಃ}{(೨ಅ - ೨ + ೨ಕ - ೨)(೨ಅ - ೨ - ೨ಕ + ೨)} \\
 & = \frac{(೨ಅ + ೨ಕ - ೫)(೨ಅ - ೨ಕ - ೧)}{(೨ಅ - ೨ಕ - ೧)ಃ} \\
 & = \frac{೨(೪ಅಃ - ೧೨ಅಕ + ೯ಕಃ - ೪ಅ + ೨ಕ + ೧)}{೨(೨ಅ - ೨ಕ - ೧)ಃ} \\
 & = \frac{೨(೨ಅ - ೨ಕ - ೧)ಃ}{೨(೨ಅ - ೨ಕ - ೧)ಃ} \\
 & = \frac{೨(೨ಅ - ೨ಕ - ೧)ಃ}{೨(೨ಅ - ೨ಕ - ೧)ಃ} \\
 & = \frac{೨(೨ಅ - ೨ಕ - ೧)ಃ}{೨(೨ಅ - ೨ಕ - ೧)ಃ}
 \end{aligned}$$

ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸಂಕ್ಷೇಪ ಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ನೋಡಲು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣವ್ಯುತ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ತರುವಾಯ ಅದರಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವೆಂದು ಕಂಡು ಬಂದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಬೇಕು. ಗುಣವ್ಯುತ್ಕರಣ ಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಸುಲಭವಿರುವದೋ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ನೋಡಲು ತೆಗೆಯಬೇಕು, ತರುವಾಯ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಎರಡನೆಯದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು

ಸುಲಭವಾಗುವದು. ಸಂಕ್ಷೇಪ ಮಾಡಲು ಹೇಳುವುದರಿಂದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಅನುವಾಗುವ ಇಷ್ಟೇ ಇರುವವು ಎಂದು ಗೃಹಿತ ಹಿಡಿದು ನಡೆಯಲು ವಿನೂತನಿಡುತ್ತಿ ಇಲ್ಲ.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೧.

ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪಗಳನ್ನು ಕೊಡಿಸಿ.

- | | |
|---|---------------------------|
| ೧. $೨ಯಿ + ೪ಯಕ್ಷ$ | ೩. $೨ಅಪ + ೩ಅಬ - ೫ಅಮ$ |
| $೨ಯಿ + ೮ಯಕ್ಷ$ | $೨ಪ + ೨ಪಬ - ೫ಪಮ$ |
| ೫. $ಅ + ಅಕ + ಅಮ + ಕಮ$ | ೪. $ಅ - ಮ$ |
| $೪ಅ + ೪ಮ$ | $ಅ + ಮ$ |
| $೪ಪ - ೨೨ಪಮ + ೪೪ಮ$ | ೬. $೬೪ಅ + ೮೦ಅಕ + ೨೫ಕ$ |
| ೭. $೬ಪ - ೧೪ಪಮ - ೭ಮ$ | $೧೬ಅ - ೨೨ಅಕ - ೨೦ಕ$ |
| ೮. $೬ಯಿ - ೨೬ಯ + ೨$ | ೯. $೮೦ಕ್ಷ + ೨ಕ್ಷ - ೧೩$ |
| $೧೨ಯಿ - ೭ಯ + ೧$ | $೧೬ಕ್ಷ + ೩೪ಕ್ಷ - ೧೫$ |
| ೧೦. $ಯಿ - ೫ಯಿ - ೪ಯ + ೨೦$ | ೧೧. $೧೦ಪ - ೨೭ಪ + ೨೦ಪ - ೩$ |
| $ಯಿ - ಯಿ - ೩೨ಯ + ೬೦$ | $೧೦ಪ + ೩ಪ - ೩೧ಪ + ೬$ |
| ೧೧. $೪ಯಿ + ೧೧ಯಿ + ೭ಯ + ೨$ | ೧೨. $೫ - ೨೫ - ೨೫ನ - ೪೨$ |
| $೧೬ಯಿ - ಯಿ + ೧$ | $೫ - ೩೫ನ - ೭೦$ |
| ೧೩. $ಮ + ೨ಮ. ೨೩ಮ ೬೦$ | |
| $ಮ - ೩೪ಮ - ೨೨೫$ | |
| $ಮ - ೨೦ಮ + ೬೪$ | |
| ೧೪. $ಮ - ೪ಮ - ೧೨ಮ + ೩ಮ + ೬೪$ | |
| $ಯಿ - ೨೪ಯಿ + ೧೪೨ಯ - ೫೧೩$ | |
| ೧೫. $ಯಿ - ೮ಯಿ - ೬೪ಯ + ೫೧೩$ | |
| $ಪ - ೨೫೬೪$ | |
| ೧೬. $೨ಪ - ೩೧ಪಮ - ೧೬ಮ$ | |
| ೧೭. $(೨ಯ + ೧)(೨ಯ + ೩)(೨ಯ + ೫)(೨ಯ + ೭) + ೧೫$ | |
| $೮ಯ + ೬೪ಯ + ೧೬೮ಯ - ೫೦$ | |

ಅ — ಲಕ್ಷ

೧೦. $ಅ + ೮೮೮೮ + ೨೨೨೨೨ + ೬೮೮$

೧೧. $೨೫೮ - ೯೮ + ೪೫ + ೨೦೮$

೧೨. $೨೫೮ - ೯೮ - ೪೫ + ೧೨೮$

೧೩. $೮ - ೧೨೮ + ೨೫೮ - ೫೦೮ + ೨೨$

೧೪. $೮ - ೨೮ - ೧೨೮ + ೧೨೮ + ೨೨$

೨.

ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ.

೫.೩. ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪು.೧೦, ಪು. ೧೦೦-೧೦೮) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೆಂದರೆ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅಂಶಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ದೇಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭೇದಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಯಾವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬರುವದೋ ಅವೇ ಇರುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅತಿ ಸುಲಭ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಬೇಕು ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕೆಂದು ಎಲ್ಲ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಜೇರೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುವ ಭಾಗಸುಪ-ದೇಂದರೆ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಎರಡನೆಯದರ ಪುಕ್ಕಮದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು.

ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡಿದೆ. ಈಗ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಸ್ವಭಕ್ತರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅಲ್ಲಿ ತೋರುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ಕೊನೆಗೆ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು) ಅತಿ ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಸರಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ.

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೧. } & \frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ} \times \frac{ಅ+ಅಕ+ಕ}{ಅ-ಅಕ+ಕ} \\ &= \frac{(ಅ+ಕ)(ಅ-ಕ)}{(ಅ+ಕ)(ಅ-ಅಕ+ಕ)} \times \frac{(ಅ-ಅಕ+ಕ)(ಅ+ಅಕ+ಕ)}{(ಅ-ಕ)^2} \\ &= \frac{ಅ+ಅಕ+ಕ}{ಅ-ಕ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೨. } & \frac{ಅ+ಬ}{ಅ-ಗಬ-ಬ} \div \frac{ಅ+ಅಬ-ಬ}{ಅ-ಗಬ-ಬ} \\ &= \frac{ಅ+ಬ}{ಅ-ಗಬ-ಬ} \times \frac{ಅ+ಅಬ-ಬ}{ಅ+ಅಬ-ಬ} \\ &= \frac{(ಅ+ಬ)^2 - ಬ^2}{(ಅ-ಬ)(ಅ+ಬ)} \times \frac{(ಅ-ಬ)(ಅ+ಬ)}{(ಅ+ಅಬ-ಬ)^2} \\ &= \frac{(ಅ+ಬ+ಬ)(ಅ-ಬ+ಬ)}{(ಅ-ಬ)(ಅ+ಬ)} \\ &\quad \times \frac{(ಅ-ಬ)(ಅ+ಬ)}{ಅ-ಬ+ಬ(ಅ-ಬ)} \\ &= \frac{(ಅ+ಬ+ಬ)(ಅ-ಬ+ಬ)}{(ಅ-ಬ)(ಅ+ಬ)} \\ &\quad \times \frac{(ಅ-ಬ)(ಅ+ಬ)}{(ಅ-ಬ)^2(ಅ+ಬ+ಬ+ಬ(ಅ+ಬ))} \\ &= \frac{(ಅ+ಬ+ಬ)(ಅ-ಬ+ಬ)}{(ಅ-ಬ)(ಅ+ಬ)} \\ &\quad \times \frac{(ಅ-ಬ)(ಅ+ಬ)}{(ಅ-ಬ)(ಅ+ಬ+ಬ+ಬ(ಅ+ಬ))} \\ &= \frac{(ಅ+ಬ+ಬ)(ಅ-ಬ+ಬ)}{(ಅ+ಬ)(ಅ-ಬ)} \end{aligned}$$

ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದಿಲ್ಲವೋ ಅವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ, ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ತರುವಾಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೩. } & \frac{\text{ಅಪ್ಪಿ} - \text{ಅಪ} - \text{೧೬}}{\text{ಅಪ್ಪಿ} + \text{೧೬} \text{ಪ} + \text{೮}} \times \frac{\text{ಪ} + \text{೧೬} \text{ಪ್ಪಿ} + \text{೨೫೬}}{\text{ಪ್ಪಿ} - \text{ಅಪ್ಪಿ} + \text{೧೬} \text{ಪ} + \text{೧೬}} \\
 & \div \frac{\text{ಅಪ್ಪಿ} - \text{೧೬} \text{ಪ}}{\text{ಅಪ್ಪಿ} - \text{೧೬} \text{ಪ} - \text{೧೦೮}} \\
 = & \frac{೩(\text{ಅಪ್ಪಿ} - \text{ಅಪ} - ೪)}{೨(\text{ಅಪ್ಪಿ} + ೩ \text{ಪ} + ೪)} \times \frac{(\text{ಪ} + ೧೬)^೨ - ೧೬ \text{ಪ್ಪಿ}}{\text{ಪ್ಪಿ} + \text{ಪ್ಪಿ} - \text{ಅಪ್ಪಿ} - ೪ \text{ಪ} + ೧೬ \text{ಪ} + ೧೬} \\
 & \times \frac{೨(\text{ಪ್ಪಿ} - \text{೨೫} \text{ಪ} - ೩೬)}{೨(\text{ಪ್ಪಿ} - ೬೪)} \\
 = & \frac{೨(\text{ಪ} - ೪)(೨ \text{ಪ} + ೧)}{(\text{ಪ} + ೪)(೨ \text{ಪ} + ೧)} \times \frac{(\text{ಪ} - ೪ \text{ಪ} + ೧೬)(\text{ಪ} + ೪ \text{ಪ} + ೧೬)}{\text{ಪ್ಪಿ}(\text{ಪ} + ೧) - ೪ \text{ಪ}(\text{ಪ} + ೧) + ೧೬(\text{ಪ} + ೧)} \\
 & \times \frac{೨(\text{ಪ} + ೪)(\text{ಪ} - ೯)}{೨(\text{ಪ} - ೪)(\text{ಪ} + ೪ \text{ಪ} + ೧೬)} \\
 = & \frac{೨(\text{ಪ} - ೪)}{(\text{ಪ} + ೪)} \times \frac{(\text{ಪ} - ೪ \text{ಪ} + ೧೬)(\text{ಪ} + ೪ \text{ಪ} + ೧೬)}{(\text{ಪ} + ೧)(\text{ಪ್ಪಿ} - ೪ \text{ಪ} + ೧೬)} \\
 & \times \frac{೨(\text{ಪ} + ೪)(\text{ಪ} - ೯)}{೨(\text{ಪ} - ೪)(\text{ಪ} + ೪ \text{ಪ} + ೧೬)} \\
 = & \frac{೨(\text{ಪ} - ೯)}{\text{ಪ} + ೧}
 \end{aligned}$$

ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭ-
ವಾದದೋ ಅವುಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡುವದು
ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು
ರಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೪. } & \frac{\text{೬ಯ್ಪಿ} + ೧೧ಯ್ಪಿ + ೨೫ - ೪}{\text{೧೨ಯ್ಪಿ} + ೫ಯ್ಪಿ - ೧೧ಯ್ಪಿ - ೬}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೧೨ಯ್ಯಿ} - \text{೧೫ಯ್ಯಿ} - \text{೧೪} \\ \times & \text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} + \text{೬೬ಯ್ಯಿ} + \text{೪೦} \\ & \text{೪೦ಯ್ಯಿ} + \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} - ೬ \\ \div & \text{೪೦ಯ್ಯಿ} - \text{೫೦ಯ್ಯಿ} - \text{೨೫ಯ್ಯಿ} - \text{೨೪} \end{aligned}$$

ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೧೧ಯ್ಯಿ} + \text{ಯ್ಯಿ} - ೪$$

$$\begin{aligned} &= \text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೫ಯ್ಯಿ} + \text{೫ಯ್ಯಿ} - ೪ಯ್ಯಿ - ೪ \\ &= \text{೬ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} + ೧) + \text{೫ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} + ೧) - ೪(\text{ಯ್ಯಿ} + ೧) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} + ೧)(\text{೬ಯ್ಯಿ} + ೫ಯ್ಯಿ - ೪) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} + ೧)(೨ಯ್ಯಿ - ೧)(೨ಯ್ಯಿ + ೬) \end{aligned}$$

$$\text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೫ಯ್ಯಿ} - \text{೧೧ಯ್ಯಿ} - ೬$$

$$\begin{aligned} &= \text{೧೨ಯ್ಯಿ} - \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೧೨ಯ್ಯಿ} - \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೬ಯ್ಯಿ} - ೬ \\ &= \text{೧೨ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) + \text{೧೨ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) + ೬(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} - ೧)(೧೨ಯ್ಯಿ + ೧೨ಯ್ಯಿ + ೬) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} - ೧)(೨ಯ್ಯಿ + ೨)(೪ಯ್ಯಿ + ೩) \end{aligned}$$

$$\text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೧೨ಯ್ಯಿ} - \text{೧೫ಯ್ಯಿ} - ೧೪$$

$$\begin{aligned} &= \text{೧೨ಯ್ಯಿ} - \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} - \text{೨೫ಯ್ಯಿ} + \text{೧೪ಯ್ಯಿ} - ೧೪ \\ &= \text{೧೨ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) + \text{೨೫ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) + ೧೪(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} - ೧)(೧೨ಯ್ಯಿ + ೨೫ಯ್ಯಿ + ೧೪) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} - ೧)(೨ಯ್ಯಿ + ೨)(೪ಯ್ಯಿ + ೬) \end{aligned}$$

$$\text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} + \text{೬೬ಯ್ಯಿ} + \text{೪೦}$$

$$\begin{aligned} &= \text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} + \text{೪೬ಯ್ಯಿ} + \text{೨೦ಯ್ಯಿ} + \text{೪೦} \\ &= \text{೬ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} + ೨) + \text{೨೫ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} + ೨) + \text{೨೦}(\text{ಯ್ಯಿ} + ೨) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} + ೨)(೬ಯ್ಯಿ + ೨೫ಯ್ಯಿ + ೨೦) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} + ೨)(೨ಯ್ಯಿ + ೫)(೨ಯ್ಯಿ + ೪) \end{aligned}$$

$$\text{೪೦ಯ್ಯಿ} + \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} - ೬$$

$$= \text{೪೦ಯ್ಯಿ} + \text{೪೦ಯ್ಯಿ} + \text{೧೦ಯ್ಯಿ} + \text{೧೦ಯ್ಯಿ} - ೨ಯ್ಯಿ - ೬$$

$$= \text{ಅಯೌ}(\text{ಯ} + ೧) + ೧೦\text{ಯ}(\text{ಯ} + ೧) - ೭(\text{ಯ} + ೧)$$

$$= (\text{ಯ} + ೧)(\text{ಅಯೌ} + ೧೦\text{ಯ} - ೭)$$

$$= (\text{ಯ} + ೧)(೨ಯ - ೧)(೪ಯ + ೭)$$

$$\text{ಅಯೌ} - ೫ಯೌ - ೩೫ಯ - ೨೪$$

$$= \text{ಅಯೌ} + ೪ಯೌ - ೧೩ಯೌ - ೨೭ಯ - ೧೦ಯ - ೨೪$$

$$= \text{ಅಯೌ}(\text{ಯ} + ೨) - ೧೩ಯ(\text{ಯ} + ೨) - ೧೨(\text{ಯ} + ೨)$$

$$= (\text{ಯ} + ೨)(\text{ಅಯೌ} - ೧೩ಯ - ೧೨)$$

$$= (\text{ಯ} + ೨)(೨ಯ - ೪)(೪ಯ + ೩)$$

∴ ರಾಶಿಯು

$$= \frac{(\text{ಯ} + ೧)(೨ಯ - ೧)(೩ಯ + ೪)}{(\text{ಯ} - ೧)(೩ಯ + ೨)(೪ಯ + ೩)} \times$$

$$\frac{(\text{ಯ} - ೧)(೩ಯ + ೨)(೪ಯ + ೩)}{(\text{ಯ} + ೨)(೨ಯ + ೫)(೩ಯ + ೪)} \times$$

$$\frac{(\text{ಯ} + ೨)(೨ಯ - ೪)(೪ಯ + ೩)}{(\text{ಯ} + ೧)(೨ಯ - ೧)(೪ಯ + ೭)}$$

$$= \frac{\text{ಯ} - ೪}{೨ಯ + ೫}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨.

ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡು.

$$೧. \frac{\text{ಅೌ} - \text{ಮೌ}}{೨\text{ಅೌ} - ೪\text{ಅಮೌ} + ೨\text{ಮೌ}} \times \frac{೨\text{ಅೌ} - ೨\text{ಮೌ}}{\text{ಅೌ} + \text{ಮೌ}}$$

$$೨. \frac{\text{ಪೌ} - \text{ಬೌ}}{\text{ಪೌ} + \text{ಪೌಬೌ} + \text{ಬೌ}} \times \frac{೫\text{ಪೌ} + ೫\text{ಬೌ}}{೮\text{ಪೌ} - ೮\text{ಬೌ}}$$

$$೩. \frac{\text{೪ಕೃ} - ೪ಕೃ - ೧೫}{೧೨ಕೃ + ೨೯ಕೃ + ೧೪} \times \frac{೧೨ಕೃ + ೧೩ಕೃ - ೧೪}{೭ಕೃ - ೧೯ಕೃ + ೧೦}$$

$$೪. \frac{೧೦ನೌ - ೪೭ನೌ + ೨೪}{೭ನೌ - ೨೭ನೌ + ೧೨} \times \frac{೭ನೌ - ೧೫ನೌ + ೭}{೧೦ನೌ - ೨೭ನೌ + ೧೨}$$

- $\frac{1000 - 200 + 2}{1000 + 200 + 2}$
೧೬. $\frac{ಪೌ - ೧೨೫}{೬೪ ಪೌ - ೧} \div \frac{೮೫ ಪೌ + ೧೬ ಪೌ + ೧}{೨೨ ಪೌ + ೪ ಪೌ - ೨}$
೧೭. $\frac{೨೫ - ೨೫ - ೨೫}{೨೫ + ೨೫ - ೨೫}$
೧೮. $\frac{೨೫ - ೨೫ - ೨೫}{೨೫ + ೨೫ - ೨೫} \times \frac{೨೫ + ೨೫ - ೧೨೫}{೨೫ - ೨೫ - ೨೫}$
೧೯. $\frac{೮೪ + ೮೪ + ೮೪}{೫೮ - ೨೪ - ೫೮} \div \left(\frac{೪೮ - ೪೮ + ೪೮}{೮ - ೨೪} \div \frac{೨೮ - ೮}{೫೮ + ೨೪ - ೫೮} \right)$
೧೯. $\frac{೨೪ + ೪}{೪ + ೪ + ೧} \div \frac{೪ + ೪ - ೨}{೪ + ೧} \times \frac{೪ - ೧}{೪ - ೪ + ೨}$
೨೦. $\frac{೪ - ೪}{೪ + ೪} \times \frac{೪ + ೪ + ೪ + ೪}{೪ + ೪ + ೪ + ೪} \div \frac{೪ - ೪}{೪ + ೪}$

೩.

ಲಘುತಮ ಸಮಷ್ಟೇದ

೫.೪. ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ದೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದಿಲ್ಲರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂಶವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದಿಲ್ಲರೆ ಮೊದಲು ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಷ್ಟೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪೈಪಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮಷ್ಟೇದ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಡುವೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಒಂದಿನ ಭಾಗ-ವಲ್ಲಿ (ಪು. ೧೯-೨೦) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದರದೇ ಸ್ವಲ್ಪ ಉಪಕರಣ-ಯನ್ನು ಇಂದು ಮಾಡುವಾ.

೫.೫ ಯಾವದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವು

ಬವಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲಕವು ಬವಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬ ಮಹತ್ವದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಕರುವಾಣಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತೇವೆ, ಇಲ್ಲವೇ ಅಕ್ಷಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಭೇದವು (ಸಮರ್ಪಕವಾದವು) ಸಾಧಾರಣವಾದವು (ಲಘುತಮ) ಇರುವ ಹಾಗೆ ಅಕ್ಷಗಳೊಳಗಾಗಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ೪ ಮತ್ತು ೩ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ೪ ಮತ್ತು ೩ ಎಂದೂ, ೩ ಮತ್ತು ೪ ಎಂದೂ.

೪ ಮತ್ತು ೩ ಎಂದೂ, ಅನೇಕ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವಾಗ ಇಲ್ಲವೇ ಅಕ್ಷಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ ಸುಲಭತೆಯ ಮತ್ತು ಅನುಕೂಲತೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅವುಗಳ ಸಮರ್ಪಕವಾದವು ಲಘುತಮವಿರುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಈ ಲಘುತಮ ಸಮರ್ಪಕವಾದವು ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುವದಿರುವದನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಅದುದರಿಂದ ಎರಡು ಅಕ್ಷವು ಮತ್ತು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಮೊದಲು ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ; ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಭೇದವು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುವದಿರುವಲ್ಲಿ ಅ ಎಲ್ಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಹಜವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅದರ ಮೇಯು ಬವಲಾಗಬಾರವೆಂದು ಭೇದವು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯಷ್ಟು ಆಗುವ ಹಾಗೆ ಮೂಲ ಭೇದವನ್ನು ರೂಪ ಸಂಬಂಧಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಅದುವರೆಗೆ ಅಂತರವನ್ನಾದರೂ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{5}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{4}{3}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಲಘುತಮ ಸಮರ್ಪಕ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು, ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೬೦ ಇದ್ದುದರಿಂದ $\frac{5 \times 60}{3 \times 60} = \frac{10 \times 60}{3 \times 60} = \frac{20 \times 60}{3 \times 60}$

$\frac{೭ \times ೬}{೧೦ \times ೬} \frac{೫ \times ೫}{೧೨ \times ೫}$ ಎಂದು, ಅವಶೇಷೇ $\frac{೪೦}{೬೦}$, $\frac{೧೫}{೬೦}$, $\frac{೨೬}{೬೦}$, $\frac{೪೨}{೬೦}$, $\frac{೨೫}{೬೦}$ ಎಂದು

ಬರೆಯುತ್ತೇನೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಪ ಬ ಮ ಇವುಗಳನ್ನು
ಯ ಲ ವ

ಪಲವ ಬಯವ ಮಯಲ ಕ ಗ ಘ
ಯಲವ ಯಲವ ಯಲವ ಎಂದೂ, ರಸ ಸಕ್ ರಕ್ ಇವುಗಳನ್ನು

ಕಕ್ ಗರ ಘಸ ಎಂದೂ, ಇಲ್ಲವೆ (ಯ+ರ)(ರ+ಲ)
ರಸಕ್ ರಸಕ್ ರಸಕ್

ಕ ಗ ಇವುಗಳನ್ನು
(ರ+ಲ)(ಲ+ಯ) (ಲ+ಯ)(ಯ+ರ)

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{೭(ಲ+ಯ)}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(ಲ+ಯ)}$

$\frac{ಕ(ಯ+ರ)}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(ಲ-ಯ)}$ $\frac{ಗ(ರ+ಲ)}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(ಲ+ಯ)}$ ಎಂದು

ಬರೆಯುತ್ತೇನೆ.

ಸಮಚ್ಛೇದವನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿದನಂತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಹೊಸ ಅಂಶವನ್ನು ಬರೆಯುವದು ಸುಲಭವಿರುತ್ತದೆ. ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಭೇದವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಸಮಚ್ಛೇದದ ಯಾವ ಅವಶೇಷಗಳಿಲ್ಲವೋ ಅವುಗಳಿಂದ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಹೊಸ ಸಮಚ್ಛೇದರೂಪ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವಿರುವದು.

ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಲಘುತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $\frac{೫}{೨೦} + \frac{೨}{೧೦} = \frac{೫}{೨೦} + \frac{೪}{೨೦} = \frac{೯}{೨೦}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು

ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಭೇದಗಳ ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಯನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಮತ್ತು ಲ ಸಾ.ವಿ. ಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವದಿದ್ದರೆ ಭೇದಗಳ ಗುಣವ್ಯುತ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಗುಣಕ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಮಾಡಲಾಗಿ,

$$\frac{\text{೫}}{\text{ಯ}^೨ + ೬\text{ಯ} + ೫} = \frac{\text{೫}}{(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \frac{\text{೩}}{\text{ಯ}^೨ + ೪\text{ಯ} - ೫} = \frac{\text{೩}}{(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \text{ಮತ್ತು } \frac{\text{೨}}{\text{ಯ}^೨ - ೧} = \frac{\text{೨}}{(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} - ೧)}$$

ಇಲ್ಲಿ ಭೇದಗಳೆ ಲ. ಸಾ. ವಿ. $(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)$.
ಆದುದರಿಂದ,

$$\frac{\text{೫}(\text{ಯ} - ೧)}{(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \frac{\text{೩}(\text{ಯ} + ೧)}{(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \text{ಮತ್ತು } \frac{\text{೨}(\text{ಯ} + ೫)}{(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \text{ಇವು ಲಘುತಮ ಸಮಷ್ಟೇದ ರೂಪಗಳು.}$$

ಉ. ೨. $\frac{\text{೩}}{\text{ಲಯ}^೨ - ೮\text{ಲ}}; \frac{\text{೧}}{\text{ಲಯ}^೨ + ೮\text{ಲ}}; \frac{\text{೨}}{\text{ಲಯ}^೨ - ೯\text{ಲ}}$

$\frac{\text{೪}}{\text{೧೬ಲಯ}^೨ - ೪ಲಯ + ೮\text{ಲ} + ೮\text{ಲ}}$ ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳೆ ಲ. ಸಾ. ವಿ.

೬ಲಯ^೨ - ೮ಲ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ $\frac{\text{೩}(\text{ಲಯ}^೨ + ೮\text{ಲ})}{\text{೬ಲಯ}^೨ - ೮ಲ}; \frac{\text{ಲಯ}^೨ - ೮\text{ಲ}}{\text{೬ಲಯ}^೨ - ೮ಲ};$
 $\frac{\text{೨}(\text{೧೬ಲಯ}^೨ + ೪ಲಯ + ೮\text{ಲ})}{\text{೬ಲಯ}^೨ - ೮ಲ}; \frac{\text{೪}(\text{ಲಯ}^೨ - ೮\text{ಲ})}{\text{೬ಲಯ}^೨ - ೮ಲ}$

ಇವು ಲಘುತಮ ಸಮಷ್ಟೇದ ರೂಪಗಳು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೩.

ಲಘುತಮ ಸಮಷ್ಟೇದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\frac{\text{೨}}{\text{ಅ} - ೪}; \frac{\text{೨}}{\text{ಅ} + ೪};$ ೨. $\frac{\text{೫}}{\text{೨ಅ} + ೩ಕ}; \frac{\text{೭}}{\text{೩ಅ} - ೨ಕ}$

೩. $\frac{\text{೭}}{\text{೧೬ಅ} - ೪ಗ}; \frac{\text{೩}}{\text{೮ಅ} + ೧೨ಗ};$ ೪. $\frac{\text{೨ನ}}{\text{೩ಯ} + ೯ರ}; \frac{\text{೩ನ}}{\text{೪ಯ} + ೧೨ರ}$

೫. $\frac{\text{೨}}{\text{ಯ}^೨ - ೬ಯ + ೮}; \frac{\text{೩}}{\text{ಯ}^೨ - ೭ಯ + ೧೨}$

೬. $\frac{ಅ}{ಅರ-ರ-ಇ}, \frac{ಅ}{ಅರ+ಇರ+೭}$
೭. $\frac{ಇವ}{೭ಯ-ಯರ-೧-ರ}, \frac{ಲವ}{೧೫ಯ+೧೪ಯರ-೮ರ}$
೮. $\frac{೧}{ಅ+೭ಅ+೮}, \frac{೪}{ಅ-ಅ-೨೦}, \frac{೨}{ಅ-೩ಅ-೧೦}$
೯. $\frac{೧}{ಅ-೨ರ}, \frac{೧}{ಅ-೨ಅಕ+ಕ}, \frac{೧}{ಅ+೨ಅಕ+ಕ}$
೧೦. $\frac{೧}{ಯ-ರ}, \frac{೧}{ಯ+ರ}, \frac{೧}{ಯ-ರ}, \frac{೧}{ಯ+ಯರ+ರ}$
೧೧. $\frac{೧}{(ಯ-ರ)(ರ-೮)}, \frac{೨}{(ರ-೮)(೮-ಯ)}, \frac{೩}{(೮-ಯ)(ಯ-ರ)}$
೧೨. $\frac{೩ಅ}{೪ಯ-೨೫ರ}, \frac{೨ಅ}{೪ಯ-೧-ರ}, \frac{ಅ}{೧೫ಯ-೨೭ಯರ-೨ರ}$

೪.

ಸಂಕಲನ* (ಬೇರೀಜ್) ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ* (ವಜಾಬಾಕಿ).

೫.೬. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮಷ್ಟೀದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶವೇನು? ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕೆಂದು ಇರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{೩}{೨}, \frac{೪}{೩}, \frac{೫}{೪}, \frac{೬}{೫}, \frac{೭}{೬}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಆ ಎಲ್ಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ನಾವು ೬. ಸಮಷ್ಟೀದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ತರುವಾಯ ಆ ರೂಪಗಳೊಳಗಿನ ಅಂಶಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬೇರೀಜು ಅಂಶವಿದ್ದು ಸಮಷ್ಟೀದವಿರುವ ಫೇದವುಳ್ಳ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು.

ಹೇಗಾದರೆ, $\frac{೩}{೨} + \frac{೪}{೩} + \frac{೫}{೪} + \frac{೬}{೫} + \frac{೭}{೬} = \frac{೪೦}{೬೦} + \frac{೪೮}{೬೦} + \frac{೭೫}{೬೦} + \frac{೮೪}{೬೦} + \frac{೭೦}{೬೦}$
 $\frac{೪೦+೪೮+೭೫+೮೪+೭೦}{೬೦} = \frac{೩೧೭}{೬೦} = \frac{೫೨}{೬೦}$

ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದಿದ್ದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಶ್ಲೇಷದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಹೊಸ ಅಂಶಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅಂತರವು ಅಂಶವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಸಮಶ್ಲೇಷದ ಇದು ಭೇದವುಳ್ಳ ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$\frac{2}{10} - \frac{3}{10} = \frac{42}{10} - \frac{32}{10} = \frac{42-32}{10} = \frac{10}{10}$$

ಯಾವ ಸಂಗತಿಯು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಅಂಕಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆದಿರುವದೋ ಅದೇ ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೂ ಇರುವದು. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತವೆ, ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಅಂಕಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಡನೆ ಇನ್ನಿತರ ವರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಇವುಗಳ ಉಪಪತ್ತಿಯು ಒಂದೇ. ನಮಗೆ $\frac{3}{ಅ+ಪ}$ ಮತ್ತು

$$\frac{2}{ಅ+ನು}$$
 ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವುದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು $\frac{3}{ಅ+ಪ} + \frac{2}{ಅ+ನು}$

$$= \frac{3(ಅ+ನು)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ನು)} + \frac{2(ಅ+ಪ)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ನು)}$$

$$= \frac{3(ಅ+ನು) + 2(ಅ+ಪ)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ನು)}$$

$$= \frac{3ಅ+2ನು+3ಪ}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ನು)} \text{ ಇರುವದು,}$$

* ಪೂರ್ವಕಾಲದ ಅಚಾರ್ಯರು ತಮ್ಮ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಯೋಗ ಈ ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಬೇರೀಜಿಗಾಗಿ, ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ವಿಯೋಗ ಈ ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ವಜಾಬಾಕಿಗಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಮತ್ತು ಅವೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು

$$\frac{3}{ಅ+ಪ} - \frac{2}{ಅ+ನು} = \frac{3(ಅ+ನು)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ನು)} - \frac{2(ಅ+ಪ)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ನು)}$$

$$= \frac{೫(ಅ+ಮ)-೩(ಅ+ಪ)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ಮ)}$$

$$= \frac{೨ಅ-೩ಪ+೫ಮ}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ಮ)} \text{ ಇರುವದು.}$$

ಹಿಂದಿನ ಅನುವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿಯೆ ಮೊದಲನೇ ಉದಾಹರಣೆಯೊಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಅವನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$\frac{೫}{ಯ^೨+೩ಯ+೫} + \frac{೩}{ಯ^೨+೪ಯ-೫} + \frac{೨}{ಯ^೨-೧}$$

$$= \frac{೫}{(ಯ+೧)(ಯ+೫)} + \frac{೩}{(ಯ-೧)(ಯ+೫)} +$$

$$\frac{೨}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)}$$

$$= \frac{೫(ಯ-೧)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)} +$$

$$\frac{೩(ಯ+೧)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)} + \frac{೨(ಯ+೫)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)} *$$

$$= \frac{೫(ಯ-೧)+೩(ಯ+೧)+೨(ಯ+೫)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)}$$

$$= \frac{೫ಯ-೫+೩ಯ+೩+೨ಯ+೧೦}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)}$$

$$= \frac{೧೦ಯ+೮}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)}$$

* ಈ ಚಿನ್ಹದಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ಹಂತವು ಅಷ್ಟು ಅವಶ್ಯಕವಲ್ಲ. ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಸಂತಕ ಆದನ್ನು ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

೫. ೭. ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವ ಸರಳ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ (೧) ಭೇದಗಳು ಗುಣಕಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಗುಣಕ

ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದು (೨) ತರುವಾಯ ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ.ವಿ. ಯನ್ನು ಅಂದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು. (೩) ಅನಂತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯೂ ಭೇದವನ್ನು ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದದದೊಳಗಿಂದ ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಅವಯವಗಳಿಂದ ಅದರ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸುವದು. (೪) ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವಂತೆ ಆ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನಾಗಲಿ, ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನಾಗಲಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ಬೇರೀಜು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯು ಯಾವುದರ ಅಂಶವು ಮತ್ತು ಸಮಚ್ಛೇದ ಇದುವ ಯಾವುದರ ಭೇದ ವಿರುವದೋ ಅದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಉತ್ತರ.

ಐ.ಲ. ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪು, ೨೦೪-೨೦೭) ತುಸು ಮಾಡಲಾಗಿದ್ದು ಅಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೧.} \quad & \frac{2}{ಯ+೧೦} + \frac{೨}{ಯ+೨೪} \\
 &= \frac{೨}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)} + \frac{೨}{(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೨(ಯ+೮)}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} + \frac{೨(ಯ+೪)}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೨(ಯ+೮) + ೨(ಯ+೪)}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೪ಯ+೨೪}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೪(ಯ+೬)}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೪}{(ಯ+೪)(ಯ+೮)}
 \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮೊದಲು ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಅವುಗಳ ಗುಣಸ್ವಧಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆ ಮೇಲೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. ತರುವಾಯ ಹೊಸ ಅಂಶಗಳ ಬೇರಿಜನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆ ನಂತರ ಬೇರಿಜಿನಲ್ಲಿ ಅವಯವಗಳು ಮೊರೆಯುತ್ತವೆಂದು ಕಂಡು ಬಂದ ಮೇಲೆ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಈ ಕೂಡಿಸಿದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ (ಸಮಚ್ಛೇದ) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಇಷ್ಟ ಬೇರಿಜನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಮತ್ತು ಸರಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

ಜೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರಿಜು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದಾಗ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಈ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋದರೆ ಇಷ್ಟ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ ೨.} & \quad \frac{೧೫೨}{೧೨೨+೧೧೨-೧೫} - \frac{೧೦೨}{೮೨+೧೧೨-೧೫} \\
 &= ೫೨ \left\{ \frac{೩}{೧೨೨+೧೧೨-೧೫} - \frac{೨}{೮೨+೧೧೨-೧೫} \right\} \\
 &= ೫೨ \left\{ \frac{೩}{(೩೨+೫)(೨-೩)} - \frac{೨}{(೨೨+೫)(೪೨-೩)} \right\} \\
 &= ೫೨ \times \frac{೩(೨೨+೫) - ೨(೩೨+೫)}{(೨೨+೫)(೩೨+೫)(೪೨-೩)} \\
 &= ೫೨ \times \frac{೫}{(೨೨+೫)(೩೨+೫)(೪೨-೩)} \\
 & \quad \frac{೨೫೨}{(೨೨+೫)(೩೨+೫)(೪೨+೫)}
 \end{aligned}$$

[illegible]

$$= \frac{\text{ಅಕೃ} - \text{ಗಕನ} - \text{ಅಕನ} + \text{ಗಂನ} + \text{ಗಾಕನ} - \text{ಗಂನ}}{(\text{ಅಕ} - \text{ಗನ})(\text{ಅಕ} - \text{ಗನ})(\text{ಅಕ} - \text{ನ})}$$

$$= \frac{\text{ಅಕೃ}}{(\text{ಅಕ} - \text{ಗನ})(\text{ಅಕ} - \text{ಗನ})(\text{ಅಕ} - \text{ನ})}$$

$$\text{ಉ. ೫.} \quad \frac{\text{ಗ}}{\text{ಅಯ} - \text{ಋರ}} - \frac{\text{ಅಯೃ} - \text{ಯರ} + \text{ಫರೃ}}{\text{ಅಯೃ} - \text{ಋರೃ}}$$

$$= \frac{\text{ಗ}}{\text{ಅಯ} - \text{ಋರ}} - \frac{\text{ಅಯೃ} - \text{ಋಯರ} + \text{ಫರೃ}}{(\text{ಅಯ} - \text{ಋರ})(\text{ಅಯೃ} + \text{ಋಯರ} + \text{ಫರೃ})}$$

$$= \frac{(\text{ಅಯೃ} + \text{ಋಯರ} + \text{ಫರೃ}) - (\text{ಅಯೃ} - \text{ಋಯರ} + \text{ಫರೃ})}{(\text{ಅಯ} - \text{ಋರ})(\text{ಅಯೃ} + \text{ಋಯರ} + \text{ಫರೃ})}$$

$$= \frac{\text{ಗಋಯರ}}{\text{ಅಯೃ} - \text{ಋರೃ}}$$

$$\text{ಉ. ೬.} \quad \frac{\text{ಯೃ} - \text{ಗಯ} - \text{ಋೃ}}{\text{ಯೃ} + \text{ಯ} - \text{ಗೃ}} - \frac{\text{ಯೃ} + \text{ಗೃಯ} + \text{ಋೃ}}{\text{ಯೃ} + \text{ಋಯ} - \text{ಗೃ}}$$

$$= \frac{(\text{ಯ} + \text{ಅ})(\text{ಯ} - \text{ಫ})}{(\text{ಯ} + \text{ಅ})(\text{ಯ} - \text{ಋ})} - \frac{(\text{ಯ} + \text{ಋ})(\text{ಯ} + \text{ಗ})}{(\text{ಯ} + \text{ಗ})(\text{ಯ} - \text{ಋ})}$$

$$= \frac{\text{ಯ} - \text{ಫ}}{\text{ಯ} + \text{ಋ}} - \frac{\text{ಯ} + \text{ಋ}}{(\text{ಯ} - \text{ಫ})}$$

$$= \frac{\text{ಯ} - \text{ಫ})(\text{ಯ} - \text{ಋ}) - (\text{ಯ} + \text{ಋ})(\text{ಯ} - \text{ಫ})}{(\text{ಯ} - \text{ಋ})(\text{ಯ} - \text{ಫ})}$$

$$= \frac{(\text{ಯೃ} - \text{ಗಯ} + \text{ಗೃ}) - (\text{ಯೃ} + \text{ಅಯ} - \text{ಋೃ})}{(\text{ಫ} - \text{ಋ})(\text{ಯ} - \text{ಫ})} = \frac{\text{ಗಯ} + \text{ಋೃ}}{(\text{ಯ} - \text{ಋ})(\text{ಯ} - \text{ಫ})}$$

$$= \frac{\text{ಃ}(\text{ಗೃ} - \text{ಅಯ})}{(\text{ಯ} - \text{ಋ})(\text{ಯ} - \text{ಫ})}$$

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಕೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವ ಪೂರ್ದದಲ್ಲಿ, ಮೊದಲು ಪತ್ರಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ಪತ್ರಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಸಾದಾ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೨.} \quad & \frac{ಅ + ಅಕ + ಕ}{ಅ + ಕ} + \frac{ಅ - ಅಕ + ಕ}{ಅ - ಕ} - \\
 & \frac{ಅ}{ಅ + ಅಕ + ಕ} \\
 & = \frac{(ಅ + ಕ)(ಅ + ಕ)}{(ಅ + ಕ)(ಅ - ಅಕ + ಕ)} + \\
 & \quad \frac{(ಅ - ಕ)(ಅ - ಕ)}{(ಅ - ಕ)(ಅ + ಅಕ + ಕ)} - \\
 & \quad \frac{ಅ}{(ಅ + ಅಕ + ಕ)(ಅ + ಅಕ + ಕ)} \\
 & = \frac{ಅ + ಕ}{ಅ - ಅಕ + ಕ} + \frac{ಅ - ಕ}{ಅ - ಅಕ + ಕ} - \\
 & \quad \frac{ಅ}{(ಅ - ಅಕ + ಕ)(ಅ + ಅಕ + ಕ)} \\
 & = \frac{(ಅ + ಕ)(ಅ + ಅಕ + ಕ) + (ಅ - ಕ)(ಅ - ಅಕ + ಕ) - ಅ}{(ಅ - ಅಕ + ಕ)(ಅ + ಅಕ + ಕ)} \\
 \text{ಅಂಶ} &= ಅ(ಅ + ಅಕ + ಕ) + ಅ(ಅ - ಅಕ + ಕ) \\
 & \quad + ಕ(ಅ + ಅಕ + ಕ) - ಕ(ಅ - ಅಕ + ಕ) - ಅ \\
 & = ಅ(ಅ + ಅಕ) + ಅಅಕ - ಅ \\
 & = ಅ + ಅಕ + ಅ(ಅ + ಕ) \\
 \therefore \text{ರಾಶಿಯು} &= \frac{ಅ(ಅ + ಕ)}{ಅ + ಅಕ + ಕ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೪.} \quad & ಅ - ಇ + ಅ - ಅಇ + ಇ \\
 & \frac{(ಅ - ಇ)(ಅ + ಅಇ + ಇ) + ಇ}{ಅ + ಅಇ + ಇ} \\
 & \frac{ಅ - ಇ + ಇ}{ಅ + ಅಇ + ಇ} = \frac{ಅ}{ಅ + ಅಇ + ಇ}
 \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨೪.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$೧. \frac{೪}{೪-ಮ} - \frac{೪}{೪+ಮ}$$

$$೨. \frac{ಅ+ಕ}{ಅ-ಕ} - \frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ}$$

$$೩. \frac{ಅಕ}{ಕ-ಗ} - \frac{ಅಗ}{ಕ-ಗ}$$

$$೪. \frac{ಅ}{ಕ} + \frac{ಕ}{ಅ} - ೨$$

$$೫. \frac{ಅ}{ಕ} + \frac{ಕ}{ಅ} + ೧$$

$$೬. \frac{ಅ}{ಪ+ಮ} + \frac{ಅಮ}{ಪ-ಮ}$$

$$೭. \frac{ಕ}{ಪ-೨ಪಮ+ಮ} - \frac{ಕ}{ಪ-ಮ}$$

$$೮. \frac{(ದ+ನ)}{ದ-ನ} - \frac{ದ-ನ}{ದ+ದನ+ನ}$$

$$೯. \frac{೧}{ಯ-೫} - \frac{೫ಯ}{ಯ-೧೫}$$

$$೧೦. \frac{ಪ+ಮ}{ಪ+ಪಮ+ಮ} + \frac{ಪ-ಮ}{ಪ-ಪಮ+ಮ}$$

$$೧೧. \frac{ಅ+೩ಅ-೪}{ಅ+೬ಅ+೧೫} + \frac{ಅ+೫ಅ-೧೪}{ಅ+೪ಅ-೨೧}$$

$$೧೨. \frac{ಅ+೨}{ಅ+೮ಅ+೧೫} + \frac{ಅ+೧}{ಅ+೭ಅ+೧೨}$$

$$೧೩. \frac{೩ಯ+೪}{೨೭ಯ+೬೪} + \frac{೩ಯ-೪}{೨೭ಯ-೬೪}$$

$$೧೪. \frac{ರ-ರಾಲ+ರಲ}{ರ+ಲ} + \frac{ಲ+ರಲ+ರಾಲ}{ರ-ಲ}$$

$$೧೫. \frac{೧}{೨ಪ+೫ಮ} - \frac{೨ಪ-೫ಮ}{೪ಪ+೨೦ಪಮ+೨೫ಮ}$$

$$೧೬. \frac{ನ^೨+೨ನ+೧}{ಪ^೩+೪ನ^೨+ನ-೬} - \frac{ನ^೨-೨ನ+೧}{ನ^೩+೬ನ^೨+೧೧ನ+೬}$$

$$೧೭. \frac{೧}{ಪ^೩-ಮ^೩} - \frac{ಪ-ಮ}{ಪ^೩+ಪ^೨ಮ^೨+ಮ^೩}$$

$$೧೮. \frac{ಅ}{ಅ^೩+೧೦ಅ+೨೫} - \frac{ಅ^೨}{ಅ^೩+೧೫ಅ+೭೫ಅ+೧೫೫}$$

$$೧೯. \frac{೧}{ಪ-೨ಮ+೩} - \frac{ಪ^೨+೪ಮ^೨+೯}{ಪ^೩-೪ಮ^೩+೧೦ಪಮ+೨೭}$$

$$೨೦. \frac{ಪ}{ಪ-೪} + \frac{ಪ}{ಪ+೪} - \frac{ಪ^೨}{ಪ^೨-೧೬}$$

$$೨೧. \frac{೧}{ನ+೩} - \frac{ನ-೩}{ನ^೨+೬ನ+೯} - \frac{೬(ನ-೩)}{(ನ+೩)^೩}$$

$$೨೨. \frac{ಪ}{ಪ^೩-ಮ^೩} + \frac{ಮ}{ಪ^೩+ಮ^೩} - \frac{ಪ^೨+ಮ^೨}{ಪ^೩+೨ಮ^೨+ಮ^೩}$$

$$೨೩. \frac{೩}{೫ಅ+೨} - \frac{೧}{೨ಅ-೫} + \frac{೪ಅ+೧೧}{೧೦ಅ^೨-೨೯ಅ+೧೦}$$

$$೨೪. \frac{೧}{ಯ+೩} - \frac{ಯ+೩}{ಯ^೨-೩ಯ+೯} + \frac{೧೦ಯ+೩}{ಯ^೩+೨೭}$$

$$೨೫. \frac{೧}{೪ಪ^೩-೨೦ಪಮ+೨೫ಮ^೨} + \frac{೧}{೪ಪ^೩+೨೦ಪಮ+೨೫ಮ^೨} - \frac{೪ಪ^೨+೨೫ಮ^೨}{೧೬ಪ^೩-೨೦೦ಪ^೨ಮ^೨+೬೫೫ಮ^೩}$$

$$೨೬. \frac{೧}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)} + \frac{೧}{(ಬ-ಮ)(ಪ-ಮ)} + \frac{೧}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)}$$

$$೨೭. \frac{ಪ-ಬ}{(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ)} + \frac{ಬ-ಮ}{(ಮ+ಪ)(ಪ+ಬ)}$$

$$+ \frac{ಮ-ಪ}{(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)}$$

$$೨೮. \frac{ಘ}{(ಗ-ಘ)(ಘ-ಕ)} + \frac{ಕ}{(ಘ-ಕ)(ಕ-ಗ)} + \frac{ಗ}{(ಕ-ಗ)(ಗ-ಘ)}$$

ಯಥಾಕ್ರಮ ಏಕೀಕರಣ.

ಉ. ೯ ಅನೇಕ ಸಲ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡದೆ, ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೊದಲು ಎರಡೇ ಪದಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಕೂಡಿಸಿ ತರುವಾಯ ಅದರಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಪದವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿಣಾಮಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕನೇ ಪದವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವದು, ಹೀಗೆ ಕ್ರಮದಿಂದ ಹೋಗುವದು ಅನುಕೂಲವಿರುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ ಲ. ಸನುಚ್ಛೇದವು ದೊಡ್ಡದು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಳೆದ ಮೂಲಕ ಅವುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಆಗುವ ಸಂಭವವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ತರಹದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$೨೯. ೧. \frac{೧}{ಅ-೨} - \frac{೧}{ಅ+೨} - \frac{೪}{ಅ+೪}$$

$$= \frac{(ಅ+೨) - (ಅ-೨)}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)} - \frac{೪}{ಅ+೪} = \frac{೪}{ಅ-೪} - \frac{೪}{ಅ+೪}$$

$$= \frac{೪(ಅ+೪) - ೪(ಅ-೪)}{(ಅ-೪)(ಅ+೪)} = \frac{೩೨}{ಅ-೧೬}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸಿದರೆ ಲ. ಸನುಚ್ಛೇದವು $(ಅ-೨)(ಅ+೨)(ಅ+೪)$ ಇದ್ದದ್ದರಿಂದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಬಹುದು.

$$ಗಾತಿಯು = \frac{(ಅ+೨)(ಅ+೪) - (ಅ-೨)(ಅ-೪) - ೪(ಅ-೨)(ಅ+೨)}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)(ಅ-೪)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a^2 - 2ab + b^2 + c^2 + d^2) - (a^2 - 2ab + b^2 + c^2 + d^2) - 2(a^2 - b^2)}{(a - b)(a + b)(c^2 + d^2)} \\
 &= \frac{(a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + d^2 - a^2 - 2ab - b^2 + c^2 + d^2 - 2a^2 + 2b^2)}{(a - b)(c^2 + d^2)} \\
 &= \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \quad \text{ಹೀಗೆ ಆಗುತ್ತದೆ.} \quad \text{ತುಲನೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ}
 \end{aligned}$$

ಮೊದಲನೇ ಮಾರ್ಗವು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಇದೇ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡು ಬರುವುದು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೨.} \quad & \frac{a - b}{a - c} - \frac{a + b}{a + c} - \frac{ac}{a^2 + 2ab + b^2} \\
 &= \frac{(a - b)(a + c) - (a + b)(a - c)}{(a - c)(a + c)} - \frac{ac}{(a + b)(a + c)} \\
 &= \frac{(a^2 + bc - ac) - (a^2 - bc - ab - cb)}{(a - c)(a + c)} - \frac{ac}{(a + b)(a + c)} \\
 &= \frac{ac}{(a - c)(a + c)} - \frac{ac}{(a + b)(a + c)} \\
 &= \frac{ac(a + b) - ac(a - c)}{(a - c)(a + c)(a + b)} \\
 &= \frac{ac^2}{(a - c)(a + b)(a + c)}
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತರಹದ ಸಾಮ್ಯವಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡಿದರೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲು ಹಾಗೆ ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಮೂರನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಳೆದಿದೆ.

ಹಲವು ಸಾರಿ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೊನೆಯ ಪದದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೊದಲನೇ ಪದದವರೆಗೆ ಹೋಗುವುದು ಅನುಕೂಲವಿರುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
\text{ಉ. ೩. } & \frac{೧}{ಯ+೧} + \frac{೨}{ಯ+೧} + \frac{೪}{ಯ+೧} + \frac{೮}{ಯ-೧} \\
&= \frac{೧}{ಯ+೧} + \frac{೨}{ಯ+೧} + \frac{೪(ಯ-೧)+೮}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)} \\
&= \frac{೧}{ಯ+೧} + \frac{೨}{ಯ+೧} + \frac{೪(ಯ+೧)}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)} \\
&= \frac{೧}{ಯ+೧} + \frac{೨}{ಯ+೧} + \frac{೪}{ಯ-೧} \\
&= \frac{೧}{ಯ+೧} + \frac{೨(ಯ-೧)+೪}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)} \\
&= \frac{೧}{ಯ+೧} + \frac{೨(ಯ+೧)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)} \\
&= \frac{೧}{ಯ+೧} + \frac{೨}{ಯ-೧} \\
&= \frac{ಯ-೧+೨}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)} \\
&= \frac{ಯ+೧}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)} \\
&= \frac{೧}{ಯ-೧}
\end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೫

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$೧. \frac{೧}{ಪ-೪} + \frac{೧}{ಪ+೪} + \frac{೨ಪ}{ಪ+೧೬}$$

$$೨. \frac{೮}{ಪ-೩} - \frac{೮}{ಪ+೩} - \frac{೮೮}{ಪ+೯}$$

$$೩. \frac{೧}{೨ಮ-೧} - \frac{೧}{೨ಮ+೧} - \frac{೨}{೪ಮ+೧}$$

$$೪. \frac{ಅ+ಕ}{ಅ-ಕ} + \frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ} = \frac{೨(ಅ-ಕ^೨)}{ಅ^೨-ಕ^೨}$$

$$೫. ೧ - \frac{೧}{ಪ-೨} + \frac{೬}{ಪ-೯}$$

$$೬. \frac{೧}{ನ} - \frac{ನ}{ನ-೧} + \frac{ನ^೨-೨}{ನ^೨-೨ನ+೨}$$

$$೭. \frac{೨ಮ}{ಮ-೪ಮ+೪} - \frac{೧}{ಮ-೨} - \frac{೩ಮ}{೪ಮ-೧೦ಮ+೪}$$

$$೮. \frac{೧}{ಪ+ಮ} - \frac{ಪ+ಮ}{ಪ-ಪಮ+ಮ} + \frac{೩ಪಮ}{ಪ-ಮ}$$

$$೯. \frac{ನ+ಮ}{ನ-ಮ} - \frac{ನ-ನಮ+ಮ}{ನ+ನಮ+ಮ} - \frac{೨ನ(೨ನ+ಮ)}{ನ^೨+ಮ^೨}$$

$$೧೦. \frac{೨}{ಯ+೫} + \frac{೧೦-೩ಯ}{ಯ-೨೫} + \frac{೫}{ಯ+೧}$$

$$೧೧. \frac{೧}{ಅ+೧} - \frac{೧}{ಅ+೨} - \frac{೨}{ಅ+೪ಅ+೨}$$

$$೧೨. \frac{೧}{೨ಪ+೧} - \frac{೧}{೨ಪ+೩} - \frac{೨}{೪ಪ+೧೨ಪ+೫}$$

$$೧೩. \frac{ಕ್ಷ+೧}{ಕ್ಷ+ಕ್ಷ+೧} - \frac{ಕ್ಷ-೧}{ಕ್ಷ-ಕ್ಷ+೧} + \frac{೨(ಕ್ಷ+೧)}{ಕ್ಷ-೧}$$

$$೧೪. \frac{೧}{೨ಯ-೧} - \frac{೧}{೨ಯ+೧} + \frac{೨}{೪ಯ+೧} + \frac{೪}{೧೬ಯ+೧}$$

$$೧೫. \frac{೧}{ಅ+೧} - \frac{೧}{ಅ+೩} - \frac{೨}{ಅ+೬ಅ+೫}$$

$$\frac{೪}{ಅ^೨+೧೧೨+೩೧ಅ+೨೧}$$

೬.

ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದು

ಋ.೧೦. ಕೆಲವು ಸಾರೆ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ
ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿ
ಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅಮೇಲೆ ಆ ಎಲ್ಲ ಪರಿಣಾಮ-
ಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸುವದು ಇಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ
ಉಪಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೧.} \quad & \frac{೨}{ಅ-೫} + \frac{೫}{ಅ+೨} - \frac{೨ಅ}{ಅ-೨೫} - \frac{೫ಅ}{ಅ-೯} \\
 &= \left(\frac{೨}{ಅ-೫} - \frac{೨ಅ}{ಅ-೨೫} \right) + \left(\frac{೫}{ಅ+೨} - \frac{೫ಅ}{ಅ-೯} \right) \\
 &= \frac{೨(ಅ+೫)-೨ಅ}{ಅ-೨೫} + \frac{೫(ಅ-೨)-೫ಅ}{ಅ-೯} \\
 &= \frac{೧೫}{ಅ-೨೫} - \frac{೧೫}{ಅ-೯} \\
 &= \frac{೧೫ಅ-೧೫೫-೧೫ಅ+೨೨೫}{(ಅ-೨೫)(ಅ-೯)} \\
 &= \frac{೨೪೦}{ಅ-೨೫ಅ+೨೨೫}
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭೇದಗಳಲ್ಲಿ
ಅ-೫ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭೇದಗಳಲ್ಲಿ
ಅ+೨ ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳಿದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಹಾಗೆ
ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಸಂಕ್ಷೇಪ-
ವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ, ಆ ನಂತರ ಈ ಸಂಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿದೆ. ನಾಲ್ಕೂ
ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಸಮರ್ಥವೆಂದು ತೆಗೆದು-
ಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡುವದಕ್ಕೆ ಯತ್ನಿಸುವ-
ದಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾದದ್ದು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೬.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು
ಗೂಡಿಸಿರಿ.

$$೧. \frac{೧}{ಯ-೩} + \frac{೧}{ಯ+೪ಯ+೩} - \frac{೬}{ಯ-೯}$$

$$೨. \frac{೪}{೧+೮} - \frac{೧}{೪+೮} + \frac{೪}{೧-೮} - \frac{೧}{೪-೮}$$

$$೩. \frac{೧}{ಪ-೨} - \frac{೧}{ಪ-೧} + \frac{೧}{ಪ-೧} - \frac{೨}{ಪ-೪}$$

$$೪. \frac{೫ನ}{ನ-೩೬} + \frac{೬ನ}{ನ-೨೫} - \frac{೫}{ನ+೬} - \frac{೬}{ನ-೫}$$

$$೫. \frac{ಅ+ಕ}{ಅ-ಕ} - \frac{೪ಅಕ}{ಅ+ಕ೨} - \frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ}$$

$$೬. \frac{೨}{ಕ್ಲ+೧} + \frac{೧}{ಕ್ಲ-೨} - \frac{೨}{ಕ್ಲ-೧} - \frac{೧}{ಕ್ಲ+೨}$$

$$೭. \frac{೧}{ಕ್ಲ-೩ಕ್ಲ+೨} - \frac{೨}{ಕ್ಲ-೪} + \frac{೧}{ಕ್ಲ+ಕ್ಲ-೨}$$

$$೮. \frac{೧}{ನ-ಮ} + \frac{೧}{ಪ+ಮ} + \frac{೧}{ಪ-ಮ} + \frac{೧}{ನ+ಮ}$$

$$೯. \frac{ಗ}{ಅ-ಕ} - \frac{ಕ}{ಅ-ಗ} - \frac{ಗ}{ಅ+ಕ} + \frac{ಕ}{ಅ+ಗ}$$

$$೧೦. \frac{೨}{ಯ-೨} + \frac{೩}{ಯ+೩} - \frac{೨}{ಯ+೪} - \frac{೩}{ಯ-೧}$$

$$೧೧. \frac{೨}{ಕ್ಲ-೨} + \frac{೪}{ಕ್ಲ+೩} - \frac{ಕ್ಲ+೧೦}{ಕ್ಲ-೨ಕ್ಲ-೪} - \frac{೪}{ಕ್ಲ+೨ಕ್ಲ+೧೫}$$

$$೧೨. \frac{೨೮}{ಅ-೨೫ಕ೨} - \frac{೫ಕ}{ಅ+೫ಅಕ+೨೫ಕ೨} - \frac{೧}{೧+೫ಕ}$$

$$+ \frac{a(a+10k)}{a^2-10k^2}.$$

೭.

ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವುದು.

೫.೧೧. ಅನೇಕ ಸಾರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಭೇದಗಳೊಳಗಿನ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೊಸ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಅನುಕೂಲ-ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಅವಶ್ಯವು ಸಹ ಇರುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$\frac{10}{a-k} + \frac{2}{k-a}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು

$$\begin{aligned} \frac{10}{a-k} + \frac{2}{k-a} &= \frac{10}{a-k} + \frac{2}{-(k-a)} = \frac{10}{a-k} - \frac{2}{a-k} \\ &= \frac{8}{a-k} \text{ ಎಂದು ಕೊಡಲು ಬರುವುದು.} \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ $k-a$ ಅಂದರೆಯೇ $-(a-k)$, ಅದುದರಿಂದ $\frac{2}{k-a}$ ಅಂದರೆಯೇ $-\frac{2}{a-k}$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಕೂಡಲೇ ನಮ್ಮ ಎಷ್ಟದಲ್ಲಿ

$$\begin{aligned} &\text{ಬರಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಬರದಿದ್ದರೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು} \frac{10}{a-k} + \frac{2}{k-a} \\ &= \frac{10(k-a) + 2(a-k)}{(a-k)(k-a)} = \frac{10k-10a+2a-2k}{(a-k)(k-a)} \\ &= \frac{8k-8a}{(a-k)(k-a)} = \frac{8(k-a)}{(a-k)(k-a)} = \frac{8}{a-k} \end{aligned}$$

ಎಂದು ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಈ ಎಲ್ಲ ಶ್ರಮವು ದ್ರಾವಿಡ ಪ್ರಾಣಾಯಾಮ-ದಂತೆ ನಗೆಗೀಡಾದದ್ದಲ್ಲವೇ? ಇಲ್ಲಿ ಲ. ಸಮಷ್ಟೀದ $(a-k)(k-a)$

ಇರದೇ ಅದು ಅ-ಕ ಇದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೂಡಲೇ ಬರಬೇಕು.

ಅದರಂತೆಯೇ $\frac{ಅಕ}{ಸ-೨ಬ} - \frac{೩ಕ}{೪ಬ-೨ಸ}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು

$$\begin{aligned} \frac{ಅಕ}{ಸ-೨ಬ} - \frac{೩ಕ}{೪ಬ-೨ಸ} &= \frac{ಅಕ}{ಸ-೨ಬ} - \frac{೩ಕ}{-(೪ಬ+೨ಸ)} \\ &= \frac{ಅಕ}{ಸ-೨ಬ} + \frac{೩ಕ}{೨(ಸ-೨ಬ)} = \frac{೪ಕ+೩ಕ}{೨(ಸ-೨ಬ)} = \frac{೭ಕ}{೨(ಸ-೨ಬ)} \end{aligned}$$

ಎಂದು ಕೊಡಲು ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ೪ಬ-೨ಸ, ಅಂ. -೨ಸ+೪ಬ, ಅಂದರೆಯೇ -೨(ಸ-೨ಬ) ಈ ಸಂಗತಿಯು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಾರದಿದ್ದರೆ ಕಾರಣವಿಲ್ಲದೆ ಕೃತಿಯು ಬೆಳೆಯುವದು.

ಚ ೧೨. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಹಿಂದೆ ನಮಗೆ ಆಗಾಗ್ಗೆ ತಿಳಿದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ.

$$ಬ-ಸ = -(ಸ-ಬ); (-ಸ)(-ಬ) = (ಸ)(ಬ);$$

$$(-ಸ)(ಬ) = (ಸ)(-ಬ); -\frac{ಸ}{ಬ} = \frac{ಸ}{-ಬ}; -\frac{ಸ}{-ಬ} = \frac{ಸ}{ಬ};$$

$$\frac{-ಸ}{ಬ} = \frac{ಸ}{-ಬ}; \frac{ಸ}{ಬ} = -\frac{ಸ}{-ಬ}; \frac{ಸ}{-ಬ} = -\frac{ಸ}{ಬ};$$

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಈ ಎರಡರೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ, ಇಲ್ಲವೆ ಅಂಶ ಅಥವಾ ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಹಿಂದಿನ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ, ಮತ್ತು ಕುಸಿನ ಹೊರಗಿನ ಚಿಹ್ನೆ ವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಪನೋಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ ಆ ಕಂಪದಲ್ಲಿರುವ ಗುಂಪಿನ ಬಾಹ್ಯ ರೂಪವು ಬದಲಾದರೂ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ, ಅದೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ

ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ, ಯಾವ ತರಹವಾದರೂ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಮುಂದೆ ಬೆಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಚೀಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಿಸಿರಿ:

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ.೧.} \quad & \frac{ಪ}{ಪ+ಮ} + \frac{ಮ}{ಪ-ಮ} + \frac{೨ಪಮ}{ಮ-ಪ} \\
 &= \frac{ಪ}{ಪ+ಮ} + \frac{ಮ}{ಪ-ಮ} - \frac{೨ಪಮ}{ಪ-ಮ} \\
 &= \frac{ಪ(ಪ-ಮ) + ಮ(ಪ+ಮ) - ೨ಪಮ}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} \\
 &= \frac{ಪ-ಪಮ + ಪಮ + ಮ-೨ಪಮ}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} \\
 &= \frac{ಪ-೨ಪಮ + ಮ}{(ಪ-ಮ)(ಪ+ಮ)} \\
 &= \frac{(ಪ-ಮ)}{(ಪ-ಮ)(ಪ+ಮ)} \\
 &= \frac{ಪ-ಮ}{ಪ+ಮ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ.೨.} \quad & \frac{ಯ-ಯರ+ರ}{ಯ-ರ} + \frac{೨ಯ}{ರ-ಯ-ರ-ಯ} \\
 &= \frac{ಯ-ಯರ+ರ}{ಯ-ರ} + \frac{೨ಯ-(ರ+ಯ)}{ರ-ಯ} \\
 &= \frac{ಯ-ಯರ+ರ}{ಯ-ರ} + \frac{ಯ-ರ}{ರ-ಯ} \\
 &= \frac{ಯ-ಯರ+ರ}{ಯ-ರ} - \frac{ಯ-ರ}{ಯ-ರ}
 \end{aligned}$$

$$\frac{ಯಃ - ಯಃ + ರಃ}{ಯಃ - ರಃ} - \frac{೧}{ಯ + ರ}$$

$$\frac{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ಯಃ + ರಃ) - (ಯಃ + ರಃ)}{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ರಃ)}$$

$$\frac{ಯಃ + ರಃ - (ಯಃ - ರಃ)}{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ರಃ)}$$

$$= \frac{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ರಃ)}{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ರಃ)}$$

ಅ. ೩. $\frac{ಕ}{ಅಕಃ - ಕನ - ಜನಃ} - \frac{ಓಕ}{ಅಕಃ + ಂಕನ + ಳನಃ}$

$$= \frac{ಕ}{ಅಕಃ - ಕನ - ಜನಃ} - \frac{ಓಕ}{ಅಕಃ + ಂಕನ - ಳನಃ} + \frac{ನ}{ಅಂನಃ + ಂಕನಕ - ಓಕಃ}$$

$$= \frac{ಕ}{ಅಕಃ - ಕನ - ಜನಃ} - \frac{ಓಕ}{ಅಕಃ + ಂಕನ - ಳನಃ} + \frac{ನ}{ಅಕಃ - ಂಕನ - ಅಂಪಃ}$$

$$= \frac{ಕ}{(ಕ - ಜನ)(ಅಕ + ನ)} - \frac{ಓಕ}{(ಅಕ + ನ)(ಓಕ + ಳನ)} + \frac{ನ}{(ಓಕ + ಳನ)(ಕ - ಜನ)}$$

$$= \frac{ಕ(ಓಕ + ಳನ) - ಓಕ(ಕ - ಜನ) + ನ(ಅಕ + ನ)}{(ಕ - ಜನ)(ಅಕ + ನ)(ಓಕ + ಳನ)}$$

$$= \frac{ಅಕಃ + ಳಕನ - ಓಕಃ + ಂಕನ + ಅಕನ + ನಃ}{(ಕ - ಜನ)(ಅಕ + ನ)(ಓಕ + ಳನ)}$$

$$= \frac{ಅಂಕನ + ನಃ}{(ಕ - ಜನ)(ಅಕ + ನ)(ಓಕ + ಳನ)}$$

$$= \frac{ನ(ಅಂಕ + ನ)}{(ಕ - ಜನ)(ಅಕ + ನ)(ಓಕ + ಳನ)}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಹಂತವನ್ನು ಮೊದಲೇ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಭೇದಗಳ ಗುಣವೃದ್ಧಕೃರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ,

$$\frac{\text{ಕ}}{(\text{ಕ}-\text{ಇನ})(\text{ಅಕ}+\text{ನ})} - \frac{\text{ಓಕ}}{(\text{ಅಕ}+\text{ನ})(\text{ಓಕ}+\text{ಇನ})} - \frac{\text{ನ}}{(\text{ಇನ}+\text{ಓಕ})(\text{ಇನ}-\text{ಕ})}$$

ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ತರುವಾಯ ಇನ - ಕ ಅಂದರೆಯೇ - (ಕ-ಇನ) ಮತ್ತು ಇನ+ಓಕ ಅಂದರೆಯೇ ವಿರುದ್ಧ ಪದಕ್ರಮದಿಂದ ಓಕ+ಇನ, ಮತ್ತು ಅದುದರಿಂದ

$$- \frac{\text{ನ}}{(\text{ಇನ}+\text{ಓಕ})(\text{ಇನ}-\text{ಕ})} = + \frac{\text{ನ}}{(\text{ಓಕ}+\text{ಇನ})(\text{ಕ}-\text{ಇನ})}$$

ಇದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಅದರಂತೆ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದಿನ ಹಂತವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು.

ಉ. ಲ. $\frac{\text{ಪಬ}}{(\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})} + \frac{\text{ಬಮ}}{(\text{ಬ}-\text{ಪ})(\text{ಮ}-\text{ಪ})} +$

$\frac{\text{ಮಪ}}{(\text{ಮ}-\text{ಬ})(\text{ಪ}-\text{ಬ})}$ ಈ ರೀತಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮೈಲಿ ನೋಡಿದರೆ ಮೂರೂ ಭೇದಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿ ಆರು ಗುಣಗಳಿದ್ದಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಕಂಡು-ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ಜೇರೆ ಜೇರೆ ಗುಣಗಳು ಮಾತ್ರವಿದ್ದು ಅನೇ ತಿರುಗಿ ಜನ್ಮಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಬಂದಿವೆ. ಪ-ಮ = - (ಮ-ಪ), ಬ-ಪ = - (ಪ-ಬ) ಮತ್ತು ಮ-ಬ = - (ಬ-ಮ) ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ,

ರಾಶಿಯು =

$$\begin{aligned} & \frac{\text{ಪಬ}}{(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ})} - \frac{\text{ಬಮ}}{(\text{ಮ}-\text{ಪ})(\text{ಪ}-\text{ಬ})} - \frac{\text{ಮಪ}}{(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})} \\ &= - \frac{\text{ಪಬ}(\text{ಪ}-\text{ಬ}) + \text{ಬಮ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) + \text{ಮಪ}(\text{ಮ}-\text{ಪ})}{(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶ=ಪೌಬ—ಪಬಿ + ಬಮ(ಬ—ಮ) + ಪಮೌ—ಪೌಮ \\
 & = ಪೌಬ—ಪೌಮ—ಪಬಿ + ಪಮೌ + ಬಮ(ಬ—ಮ) \\
 & = ಪೌ(ಬ—ಮ)—ಪ(ಬಿ—ಮೌ) + ಬಮ(ಬ—ಮ) \\
 & = (ಬ—ಮ){ಪೌ—ಪ(ಬ+ಮ)+ಬಮ} \\
 & = (ಬ—ಮ){ಪೌ—ಪಬ)—ಪಮ—ಬಮ} \\
 & = (ಬ—ಮ){ಪ(ಪ—ಬ)—ಮ(ಪ—ಬ)} \\
 & = (ಬ—ಮ)(ಪ—ಬ)(ಪ—ಮ) \\
 & = --(ಪ—ಬ)(ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ) \\
 \therefore \text{ಫಲಿತಂ} & = \frac{--(ಪ—ಬ)(ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ)}{(ಪ—ಬ)(ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ)} = ೧.
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡತಕ್ಕ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಘೇದಗಳು ಮೇಲಿನಂತೆ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಅಂತರದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿರುವವೋ ಅಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಂತೆ ಚಿನ್ನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ವಿನಿಮಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆವರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಮಷ್ಟಿರುವ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವವು ಸುಲಭವಾಗುವವು. ಇಂಥ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಣಾನುಕ್ರಮದಂತೆ ವರ್ಣಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಕೊನೆಯ ವರ್ಣದ ನಂತರ ತಿರುಗಿ ಮೊದಲನೆಯವನ್ನು ಬರೆಯುವವು ರಾಜಮಾರ್ಗವು. ಈ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋದರೆ ಯಾವ ತರದವ ತಪ್ಪಾಗುವ ಸಂಭವವಿಲ್ಲ. ಬರೆಯುವ ಈ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ (ಪ—ಬ, ಬ—ಮ, ಮ—ಪ) ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮವೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದೆ. ಘೇದಗಳಲ್ಲಿಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯಕ್ರಮದಿಂದ ತಿರುಗಿ ಬರೆದ ಮೂಲಕ ಯಾವ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ನೋಡಲು ಅದು ಗುಣಗಳು ಕಾಣುತ್ತಿದ್ದವೋ ಅಲ್ಲಿ ನೋಡಾಗಿ ಮೂರೇ ಗುಣಗಳಿದ್ದದ್ದು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡೇ ಬಂದಿರುವುದು.

ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಒಳ್ಳೇ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಘೇದಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯಕ್ರಮದಿಂದಲೇ ಬರೆಯುವವು ಅವಶ್ಯವಿದೆ ಎಂದಲ್ಲಿ, ಅದರ ಸಮ್ಮತರಬೇತಿಯು ಅಷ್ಟು ಅಗುವವರೆಗೆ ಹಾಗೆ ಮಾಡುವುದು ಇಷ್ಟವಾದುದು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೭.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿ.

೧. $\frac{೨}{ಪ-ಮ} + \frac{೬}{ಮ-ಪ}$

೩. $\frac{೧}{೫ಯ-೩} - \frac{೧}{೩-೫ಯ}$

೩. $\frac{ರ+೫}{ರ-೩} - \frac{೫-ರ}{೩-ರ}$

೪. $\frac{೪ಪ}{ಪ-ಮ} - \frac{೪ಮ}{ಮ-ಪ}$

೫. $\frac{೪}{ಕ್ಷ-೫ಕ್ಷ+೪} - \frac{೧}{೧-ಕ್ಷ} - \frac{೧}{ಕ್ಷ-೪}$

೬. $\frac{೩}{ಪ+ಮ} + \frac{೩}{ಮ+ಪ} - \frac{೮ಮ}{ಮ-ಪ}$

೭. $\frac{೧}{೨ಕ+೨ಕ-೪} - \frac{೧}{೮-೧೦ಕ-೩ಕ}$

೮. $\frac{೪}{ನ-೨} + \frac{೨}{೪-ನ} + \frac{೮-೩ನ}{೮-೩ನ+೪}$

೯. $\frac{೨+೪ಯ}{೧-೪ಯ} - \frac{೨-೪ಯ}{೧+೪ಯ} + \frac{೧೨ಯ}{೧೨ಯ-೧}$

೧೦. $\frac{೨}{೨-ಕ್ಷ} - \frac{೧}{ಕ್ಷ+೪} + \frac{೨}{ಕ್ಷ+೨} - \frac{೧}{೪-ಕ್ಷ}$

೧೧. $\frac{೬}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)} - \frac{೮}{(ಮ-ಬ)(ಮ-ಪ)}$

೧೨. $\frac{೧}{(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)} + \frac{೧}{(ಬ-ಮ)(ಬ-ಪ)} + \frac{೧}{(ಮ-ಪ)(ಮ-ಬ)}$

೧೩. $\frac{೮ಬ}{(ಮ-ಪ)(ಮ-ಬ)} + \frac{೮ಮ}{(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)} + \frac{೮ಪ}{(ಬ-ಮ)(ಬ-ಪ)}$

೧೪. $\frac{೪}{(ಯ-ರ)(ಯ-೮)} + \frac{೪}{(ರ-೮)(ರ-ಯ)} + \frac{೪}{(೮-ಯ)(೮-ರ)}$

೧೫. $\frac{೪+ರ}{(ಯ-೮)(ರ-೮)} + \frac{ರ-೮}{(ರ-ಯ)(೮-ಯ)} - \frac{೪+೮}{(ಯ-ರ)(ರ-೮)}$

$$\text{ಉ.೪.} \quad \frac{\frac{ಪ+ಬ}{ಮ}}{\frac{ನ}{ಮ}} = \frac{ಪ+ಬ}{ಮ} \div \frac{ನ}{ಮ} = \frac{ಪ+ಬ}{ಮ} \times \frac{ಮ}{ನ} = \frac{ಪ+ಬ}{ನಮ}$$

$$\text{ಉ.೫.} \quad \frac{\frac{ಯ}{ಯ-ರ}}{\frac{ಲ}{ಯ-ರ}} = \frac{ಯ}{ನ} \div \frac{ಯ-ರ}{ಲ} = \frac{ಯ}{ನ} \times \frac{ಲ}{ಯ-ರ} = \frac{ಯಲ}{ಯ-ರ}$$

$$\text{ಉ.೬.} \quad \frac{\frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ}}{\frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ}} = \frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ} \div \frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ}$$

$$\frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ} = \frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ} \times$$

$$\frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ} = \frac{(ಮ-ಯ)(ಮ+ಯ)}{ಮ+ಮಯ+ಯ}$$

$$\times \frac{(ಮ-ಯ)(ಮ+ಮಯ+ಯ)}{(ಮ+ಮಯ)} = \frac{(ಮ-ಯ)^2}{ಮ+ಯ}$$

$$\text{ಉ.೭.} \quad \frac{\frac{ನ+ಮ}{ನ-ಮ} - \frac{ನ-ಮ}{ನ+ಮ}}{\frac{ನ+ಮ}{ನ-ಮ} + \frac{ನ-ಮ}{ನ+ಮ}} = \frac{\frac{(ನ+ಮ)^2 - (ನ-ಮ)^2}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}}{\frac{(ನ+ಮ)^2 + (ನ-ಮ)^2}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}}$$

$$\frac{(ನ^2+ಮ^2)-(ನ^2-ಮ^2)}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)} = \frac{(ನ^2+ಮ^2)+(ನ^2-ಮ^2)}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}$$

$$= \frac{(ನ^2+ಮ^2)+(ನ^2-ಮ^2)}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}$$

$$= \frac{\frac{ನ^2-ಮ^2}{ನ+ಮ}}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}$$

$$= \frac{\text{ಅನಮ}}{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})} \times \frac{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})}{\text{ಅ}(\text{ನ}^2+\text{ಮ}^2)} = \frac{\text{ಅನಮ}}{\text{ನ}^2+\text{ಮ}^2}.$$

ಆದಿರ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ (ನ-ಮ) (ನ+ಮ) ವಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ನಾವು ಈ ಖದಾಹರಣೆಯನ್ನು

$$\begin{aligned} \text{ರಾಶಿಯು} &= \frac{(\text{ನ}+\text{ಮ})^2 - (\text{ನ}-\text{ಮ})^2}{(\text{ನ}+\text{ಮ})^2 + (\text{ನ}-\text{ಮ})^2} \\ &= \frac{(\text{ನ}^2 + \text{ಅನಮ} + \text{ಮ}^2) - (\text{ನ}^2 - \text{ಅನಮ} + \text{ಮ}^2)}{(\text{ನ}^2 + \text{ಅನಮ} + \text{ಮ}^2) + (\text{ನ}^2 - \text{ಅಮ} + \text{ಮ}^2)} \\ &= \frac{\text{ಅನಮ}}{\text{ಅ}(\text{ನ}^2 + \text{ಮ}^2)} = \frac{\text{ಅನಮ}}{\text{ನ}^2 + \text{ಮ}^2}. \end{aligned}$$

ಎಂದು ಸಹ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ವಿಡಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬಾಹ್ಯರೂಪವು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಅಷ್ಟೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ, ಎಂಬ ಮಹತ್ವದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೮.} \quad & \frac{\text{ಕ}-\text{ನ}+\frac{\text{ಕನ}}{\text{ಕ}-\text{ನ}}}{\text{ಕ}+\text{ನ}-\frac{\text{ಕನ}}{\text{ಕ}+\text{ನ}}} = \frac{\text{ಕ}-\text{ನ}+\frac{\text{ನ}^2}{\text{ಕ}^2+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2}}{\text{ಕ}+\text{ನ}-\frac{\text{ನ}^2}{\text{ಕ}^2-\text{ಕನ}+\text{ನ}^2}} \\ &= \frac{(\text{ಕ}-\text{ನ})^2 + \text{ಕನ}}{\text{ಕ}-\text{ನ}} \div \frac{(\text{ಕ}+\text{ನ})^2 - \text{ಕನ}}{\text{ಕ}+\text{ನ}} = \frac{\text{ಕ}-\text{ನ}^2+\text{ನ}^2}{\text{ಕ}^2+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2} \div \frac{\text{ಕ}^2+\text{ನ}^2-\text{ನ}^2}{\text{ಕ}^2-\text{ಕನ}+\text{ನ}^2} \quad (1) \\ &= \frac{\text{ಕ}^2-\text{ಕನ}+\text{ನ}^2}{\text{ಕ}-\text{ನ}} \times \frac{\text{ಕ}+\text{ನ}}{\text{ಕ}^2+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2} = \frac{\text{ಕ}^2}{\text{ಕ}^2+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2} \times \frac{\text{ಕ}^2-\text{ಕನ}+\text{ನ}^2}{\text{ಕನ}} \quad (2) \end{aligned}$$

$$= \frac{(ಕ+ನ)(ಕ-ಕನ+ನ)}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)} - \frac{ಕ-ಕನ+ನ}{ಕ+ಕನ+ನ} \quad (೨)$$

$$= \frac{(ಕ+ನ)(ಕ-ಕನ+ನ) - (ಕ-ನ)(ಕ-ಕನ+ನ)}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)} \quad (೩)$$

$$= \frac{(ಕ-ಕನ+ನ)\{(ಕ+ನ)-(ಕ-ನ)\}}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)} \dots \dots (೪)$$

$$= \frac{೨ನ(ಕ-ಕನ+ನ)}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)}$$

ನಾಲ್ಕನೇ ಹಂತವನ್ನು ಮೇಲಿನಂತೆ ಬರೆಯುವ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸುವಂತೆ
ಮರೆದು ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು

$$= \frac{ಕ-ಕನ+ನ}{ಕ+ಕನ+ನ} \left(\frac{ಕ+ನ}{ಕ-ನ} - ೧ \right) \dots \dots (೫)$$

$$= \frac{ಕ-ಕನ+ನ}{ಕ+ಕನ+ನ} \times \frac{(ಕ+ನ)-(ಕ-ನ)}{ಕ-ನ} \dots \dots (೬)$$

$$= \frac{೨ನ(ಕ-ಕನ+ನ)}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)} ಎಂದು ಸಹ ದೃಢೀಕರಿಸಬಹುದು.$$

ಪ್ರಭಾಗಜಾತಿಯ ಅಮೂರ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ
ಅಂತ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ

ಹೆಚ್ಚು ಕಾಳಜಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ. $\frac{ಕ}{ನ}$ ಹೀಗೆ ಅಪೂರ್ಣ

ರ್ತಾಂಕವನ್ನು ಬರೆದರೆ ಕ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು $\frac{ನ}{ಕ}$ ಇದು ಭೇದವಿರುತ್ತದೆಯೋ

ಇಲ್ಲವೆ $\frac{ಕ}{ನ}$ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು ಪ ಇದು ಭೇದವಿರುವದೋ ಎಂಬ ಸಂವೇಶವು

ಹಿಡಿದುಗರೆ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವದು. ಅದುವರಿಂದ ಬರೆಯುವುದರಲ್ಲಿ

ಸಂದಿಗ್ಧತೆಯಿರುವಾರವೆಂದು ಮುಖ್ಯ ಅಂತ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ

ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ದಪ್ಪಾಗಿ ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದವಿರಬೇಕು. ಹೀಗಿಂದರೆ

ಕ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು $\frac{ನ}{ಕ}$ ಇದು ಭೇದವಿದ್ದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು $\frac{ಕ}{ನ}$ ಎಂದು

ಇಲ್ಲವೆ $\frac{೪}{೫}$ ಬಿಂದು, ಮತ್ತು $\frac{೪}{೫}$ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು ಪ ಇವು ಭೇದವಿದ್ದರೆ.

ಅದನ್ನು $\frac{೫}{೫}$ ಎಂದೂ ಇಲ್ಲವೆ $\frac{೫}{೫}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೮.

ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\frac{೦+೦}{೦+೫}$

೨. $\frac{೪-೫}{೦+೫}$

೩. $\frac{೫-೫}{೫+೦-೫}$

೪. $\frac{೫-೫}{೫-೫}$

೫. $\frac{೫}{೫} - \frac{೫}{೫}$

೬. $\frac{೫-೫+೦}{೫-೫+೫}$

೭. $\frac{೫-೫}{೦+೫+೫}$

೮. $\frac{೫+೫}{೦+೫-೫}$

೯. $\frac{೫+೫+೫-೫}{೫+೫+೫}$

$$\text{೧೦೦.} \quad \frac{\frac{\text{ಪ}^೨}{\text{ಬಯ}} + \frac{\text{ಬ}^೨}{\text{ಪಮ}} + \frac{\text{ಮ}^೨}{\text{ಪಬ}} - ೨}{\frac{೧}{\text{ಬಮ}} + \frac{೧}{\text{ಪಮ}} + \frac{೧}{\text{ಪಬ}}}$$

$$\text{೧೦೧.} \quad \frac{\text{ಯ} - \frac{\text{ಯ} - ೧೨}{\text{ಯ} + ೮}}{\text{ಯ} + \frac{\text{ಯ} + ೨೦}{\text{ಯ} + ೮}}$$

$$\text{೧೦೨.} \quad \frac{\text{ಬ} - ೨ - \frac{೧೦}{\text{ಬ} + ೨}}{\text{ಬ} - ೪ - \frac{೧೨}{\text{ಬ} + ೨}}$$

$$\text{೧೦೩.} \quad \frac{\text{ಯ} + \frac{\text{೪ಯ} - ೧}{\text{ಯ} - ೪}}{\text{ಯ} + ೩ + \frac{೨}{\text{ಯ} - ೨}}$$

$$\text{೧೦೪.} \quad \frac{\frac{\text{ಅ} - \text{ಕ}^೨}{\text{ಕ} - \text{ಕ}} - \frac{\text{ಅ} - \text{ಕ}^೨}{\text{ಅ} + \text{ಕ}}}{\frac{\text{ಅ} - \text{ಕ}^೨}{\text{ಅ} - \text{ಕ}} + \frac{\text{ಅ} - \text{ಕ}^೨}{\text{ಅ} + \text{ಕ}}}$$

$$\text{೧೦೫.} \quad \frac{\frac{೨೧(\text{೫} - \text{ಯ}) - ೧೨೮}{೨೧} + \frac{೧೧(\text{ಯ} - ೧೮)}{೨}}{\frac{೨೧}{೨} + \frac{೧೧(\text{ಯ} - ೧೮)}{೨}}$$

$$\text{೧೦೬.} \quad \frac{\frac{\text{ಪ} + \text{ಬ}}{೧ - \text{ಪಬ}} + \frac{\text{ಪ} - \text{ಬ}}{೧ + \text{ಪಬ}}}{\frac{೧ - \text{ಪ} + \text{ಬ}}{೧ - \text{ಪಬ}} \times \frac{\text{ಪ} - \text{ಬ}}{೧ + \text{ಪಬ}}}$$

$$\text{೧೦೭.} \quad \frac{\frac{\text{೪ಅಕ}}{\text{ಅ} + \text{ಕ}} + ೨ಕ}{\frac{\text{೪ಅಕ}}{\text{ಅ} + \text{ಕ}} - ೨ಕ} + \frac{\frac{\text{೪ಅಕ}}{\text{ಅ} + \text{ಕ}} + ೨ಕ}{\frac{\text{೪ಅಕ}}{\text{ಅ} + \text{ಕ}} - ೨ಕ}$$

$$\text{೧೦೮.} \quad \frac{\frac{೧}{\text{ಪ}^೨} + \frac{೧}{\text{ಮ}^೨} - \frac{೨}{\text{ಪಮ}}}{\frac{೧}{\text{ಪ}} - \frac{೧}{\text{ಮ}}} - \frac{\frac{೧}{\text{ಪ}^೨} + \frac{೧}{\text{ಮ}^೨} + \frac{೨}{\text{ಪಮ}}}{\frac{೧}{\text{ಪ}} + \frac{೧}{\text{ಮ}}}$$

$$\text{೧೦೯.} \quad \frac{\text{ಯ} + ೪ - \frac{೩}{\text{ಯ} + ೨}}{\text{ಯ} + ೨ - \frac{೨}{\text{ಯ} + ೩}} \div \frac{\text{ಯ} - ೨ + \frac{೫}{\text{ಯ} + ೪}}{\text{ಯ} - ೪ + \frac{೧೨}{\text{ಯ} + ೫}}$$

$$10. \frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}} \cdot \frac{\frac{e}{f} - \frac{g}{h}}{\frac{e}{f} + \frac{g}{h}}$$

$$11. \frac{1 - \frac{2}{3}}{2 + \frac{3}{4}} \cdot \frac{4 + \frac{5}{6}}{1 - \frac{7}{8} - \frac{9}{10}}$$

$$12. \frac{\frac{p-1}{q} + \frac{r}{p+1}}{1 + \frac{r}{p-1}} \left(1 - \frac{r}{p+1} \right) \times \frac{\frac{p-1}{p+1} - \frac{r}{p+1}}{\frac{r}{p+1}}$$

$$13. \frac{\frac{a+b}{c+2a-10} - \frac{a+b}{c+4a-10}}{1 - \frac{2a+10}{c+10a+20}} \times \frac{\frac{a+1}{c} - \frac{r}{c}}{1 - \frac{c-1}{c}}$$

$$14. \frac{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} - 1}{\frac{p}{q} - \frac{p}{q}} \times \frac{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + 1}{\frac{p}{q} - \frac{p}{q}} \div$$

$$15. \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{p}}{1} + \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{b}}{1} + \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p}}{1} + \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{p}}$$

$$\frac{೧}{ಪಬ} + \frac{೧}{ಬಮ} + \frac{೧}{ಪಮ}$$

$$\frac{೧}{ಪಬಮ}$$

೯.

ಪರಂಪರಿತ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

ಜ.೧೪. $\frac{೨}{೧೦ + \frac{೪}{೧ - \frac{೬}{೨ - \frac{೮}{೧೨}}}}$ ಇದು ಪರಂಪರಿತ (Continued)

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಉದಾಹರಣೆ-
ಯಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಈ ತರಹದ
ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಿಂದ
ಮೇಲ್ಮಡಿಗೆ ಬಿಡಿಸುತ್ತ ಹೋಗ-

ಬೀಜಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು
ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ ೧. $\frac{೨}{೨ + \frac{೨}{೪ - \frac{೧}{೨ + ೧}}}$ ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\frac{೨}{೨ + \frac{೨}{೪ - \frac{೧}{೨ + ೧}}} = \frac{೨(೪ - \frac{೧}{೨ + ೧})}{೪ - \frac{೧}{೨ + ೧}} = \frac{೨(೪ - \frac{೧}{೨ + ೧})}{\frac{೪(೨ + ೧) - ೧}{೨ + ೧}} = \frac{೨(೪ - \frac{೧}{೨ + ೧})}{\frac{೮ + ೪ - ೧}{೨ + ೧}} = \frac{೨(೪ - \frac{೧}{೨ + ೧})}{\frac{೧೧}{೨ + ೧}} = \frac{೨(೪ - \frac{೧}{೨ + ೧})}{೧೧}$$

$$೨ \div \frac{೧೧}{೨ + ೧} = \frac{೨(೨ + ೧)}{೧೧}; ೨ + \frac{೨(೨ + ೧)}{೧೧}$$

$$\frac{೨(೨ + ೧) + ೧೧}{೧೧}$$

$$\frac{೨(೨ + ೧) + ೧೧}{೧೧} = \frac{೨(೧೨ + ೯)}{೧೧}; ಮತ್ತು$$

$$೨ \div \frac{೨(೧೨ + ೯)}{೧೧} = ೨ \times \frac{೧೧}{೨(೧೨ + ೯)} = \frac{೧೧}{೧೨ + ೯}$$

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ
ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ, ಎಂಬ ನಿಯಮವು
ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಇದೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು

$$\begin{aligned} \text{ರಾಶಿಯು} &= \frac{2}{3} = \frac{2 \times 25}{3 \times 25} = \frac{2(3+2)}{3 \times 25} = \frac{2(3+2)}{75} \\ &= \frac{2 \times 25}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ಎಂದೂ ಸಹ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು.

ಉ. ೨. $\frac{3^2 - 3 - 2}{3^2}$ ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} &= \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} \\ &= \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} &= \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} = \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} \div \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} \\ &= \frac{(3-2)(3+2)}{3} \times \frac{3+2}{3^2 - 3 - 2} \\ &= (3-2)(3+2) = 3^2 - 3 - 2; \end{aligned}$$

$$3^2 - (3^2 - 3 - 2) = 3 - 2; \quad \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} = \frac{3 - 2}{3^2};$$

$$\frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} \div \frac{3 - 2}{3^2} = \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} \times \frac{3^2}{3 - 2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} \times \frac{3^2}{3 - 2} \\ &= \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2} \times \frac{3^2}{3 - 2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3^2 - 3 - 2}{3^2}$$

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೯.

ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$೧. \frac{೧}{೨} .$$

$$೨. \frac{೫}{೩೫}$$

$$\frac{೧-೧}{೧-೩}$$

$$\frac{೨+೨}{೫-೧}$$

$$೩. \frac{೨೫}{೧-೪೫}$$

$$೪. \frac{೧}{೧-೬}$$

$$\frac{೨-೧}{೧-೨೫}$$

$$\frac{೬-೧}{೬-೫}$$

$$೫. \frac{೧}{೩-೧}$$

$$೬. \frac{೧}{೩}$$

$$\frac{೩-೧}{೩-೪೫}$$

$$\frac{೩-೧}{೩-೪೫}$$

$$೭. \frac{೩-೧}{೩+೧}$$

$$೮. \frac{೪೫-೨}{೪೫-೩}$$

$$\frac{೩-೧+೧}{೩+೧}$$

$$\frac{೪೫-೨+೧}{೪೫-೩}$$

$$೯. \frac{೧}{೧-೩}$$

$$೧೦. \frac{೫}{೧-೬}$$

$$\frac{೨-೧}{೧-೫}$$

$$\frac{೫+೨}{೧+೩}$$

$$೧೧. \frac{೧}{೧+೫}$$

$$೧೨. \frac{೧+೨}{೨+೩}$$

$$\frac{೧+೫}{೧+೫}$$

$$\frac{೨+೩}{೨+೩}$$

೧೦.

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಗ್ರಹೀಕರಣವು.

೫.೧೫. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಗೆ ಒಂದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸುತ್ತೀವೋ ಅದರಂತೆಯೇ ಸಮಗ್ರ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ನಿಂಗಡಿಸಲು ಸಹ ಬರಬೇಕು. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಗ್ರಹಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸುವುದು ಇವು ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\frac{೧}{೫} + \frac{೧}{೫} = \frac{೨+೫}{೫} \text{ ಮತ್ತು } \frac{೨}{೫} + \frac{೫}{೫} = \frac{೨+೫+೫}{೫}$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸುವುದೋ ಅದರಂತೆ ತಿರುಗಿ $\frac{೨+೫}{೫}$ ಮತ್ತು $\frac{೨+೫+೫}{೫}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ

$$\frac{೨+೫}{೫} = \frac{೨}{೫} + \frac{೫}{೫} \text{ ಎಂದೂ ಮತ್ತು } \frac{೨+೫+೫}{೫} = \frac{೨}{೫} + \frac{೫}{೫} + \frac{೫}{೫} \text{ ಎಂದೂ}$$

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಗ್ರಹಿಸಲು ಸಮಗ್ರ ಬರಬೇಕು. ಈಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಗ್ರಹವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ.೧. $\frac{೨೫+೨೫೫+೨೫೫+೫೫}{೨೫+೫೫}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ಅ^3}{ಅ^3ಅ} + \frac{ಅಅ^2ಅ}{ಅ^3ಅ} + \frac{ಅಅಅ^2}{ಅ^3ಅ} + \frac{ಅ^3}{ಅ^3ಅ} \\
&= \frac{ಅ}{ಅ} + \frac{ಅ}{ಅ} + \frac{ಅ}{ಅ} + \frac{ಅ}{ಅ} .
\end{aligned}$$

ಹಲವು ಸಾರೆ ಹೀಗೆ ಒಡೆಯಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಕುಶಲತೆಯು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೨. $\frac{ಅಸ}{ಸ+ಮ-ಮ}$ ಇದನ್ನು ಎರಡೂ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆ ಬೇರಿಸಿ
ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned}
\frac{ಅಸ}{ಸ+ಮ-ಮ} &= \frac{(ಸ+ಮ)+(ಸ-ಮ)}{(ಸ+ಮ)(ಸ-ಮ)} \\
&= \frac{ಸ+ಮ}{(ಸ+ಮ)(ಸ-ಮ)} + \frac{ಸ-ಮ}{(ಸ+ಮ)(ಸ-ಮ)} \\
&= \frac{೧}{ಸ-ಮ} + \frac{೧}{ಸ+ಮ} .
\end{aligned}$$

ಉ. ೩. $\frac{ಅಅ+ಅ}{ಅ+ಅಅ-೧೪}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ-
ಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned}
\frac{ಅಅ+ಅ}{ಅ+ಅಅ-೧೪} &= \frac{(ಅ+೨)+(ಅ-೨)}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)} \\
&= \frac{ಅ+೨}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)} + \frac{ಅ-೨}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)} \\
&= \frac{೧}{ಅ-೨} + \frac{೧}{ಅ+೨}
\end{aligned}$$

ಜ. ೧೬. ಎಷ್ಟೋಸಲ (ಭಾಗಹೋಗದಿರುವ) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಭಾಗಾಘಾ-
ಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು
ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಶ್ವೇತದಲ್ಲಿ ೨೪ಕ್ಕೆ ೬ ರಿಂದ ನಿಶ್ಚಿತ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ೪ ಇದು ರೂಪ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲು ಬರುತ್ತದೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಶ್ವೇತದಲ್ಲಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ, ಅದುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬೇರೆ ತೆಗೆಯುವದಿಲ್ಲದೆ ಅದನ್ನು ೪ಕ್ಕೆ, ಕೆಲವು ಮಟ್ಟಿಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಮಟ್ಟಿಗೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇಂಥ, ಅಂದರೆ ಯೇ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು ಹೇಗೆ ೨ಕ್ಕೆ ಅಂದರೆ

$$೨ + \frac{೪}{೪} \text{ ಇರುವದೋ ಅವರಂತೆಯೇ } ೨ + \frac{೪}{೪} \text{ ಅಂದರೆ ಮಾತ್ರ } ೨ + \frac{೪}{೪}$$

ಅಲ್ಲಿ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕದ್ದು. ಅ $\frac{೪}{೪}$ ಅಂದರೆ ೨ $\times \frac{೪}{೪}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವ ಭಿನ್ನ ಸ್ವರೂಪವಿರುವವೆಂಬುದನ್ನು ಮರೆಯಬಾರದು.

ಅವರಂತೆಯೇ ೨ + $\frac{೪}{೪}$ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು, ೨ + $\frac{೪}{೪}$ ಎಂದು ಎಂದಿಗೂ ಬರೆಯಬಾರದು.

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೪. } \frac{೨+೯}{೨+೭} &= \frac{(೨+೭)+೨}{೨+೭} \\ &= \frac{೨+೭}{೨+೭} + \frac{೨}{೨+೭} = ೧ + \frac{೨}{೨+೭} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೫. } \frac{೨-೧೧}{೨+೫} &= \frac{(೨+೫)-೧೬}{೨+೫} \\ &= \frac{೨+೫}{೨+೫} - \frac{೧೬}{೨+೫} = ೧ - \frac{೧೬}{೨+೫} \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಅಂಶದ ಘೇನ ಅಧಿಕ ರೇಷ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿ ಮಂಡಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಅವರ ಮೇಲಿಂದ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಘೇನದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ಎಷ್ಟು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$$\text{ಉ. ೬. } \frac{೨೨-೧೯}{೨೨-೨} = \frac{೨೨-೧೨-೭}{೨೨-೨}$$

$$= \frac{೪(೨೮-೨)-೨}{೨೮-೨} = ೪ - \frac{೨}{೨೮-೨}$$

೧೬ಲ್ಲಿ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಲಘು ಮತ್ತು ಭೇದದಲ್ಲಿ ೨೮ ಇರುವುದರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರವು ೪ ಬರುವದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಕಾಣುತ್ತೇವೆ, ಅದುವರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಅಂಶವನ್ನು ಭೇದದ ಸಾಲು ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ ಶೇಷವೆಂದು ಮುಂದಿಡಲಾಗಿದೆ.

$$\text{ಉ. ೨.} \quad \frac{೬ಯ-೧೧ಯ-೮}{೨ಯ-೫}$$

$$= \frac{೬ಯ-೧೧ಯ+೪ಯ-೧೦+೨}{೨ಯ-೫}$$

$$= \frac{೬ಯ(೨ಯ-೫)+೨(೨ಯ-೫)+೨}{೨ಯ-೫}$$

$$= ೬ಯ+೨+ \frac{೨}{೨ಯ-೫}$$

೫. ೧೬. ಅಂಶದ ಪುನರಾಚನೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವವೆಂಬುದು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಾರದಿದ್ದರೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಕೊಟ್ಟೆ. ಅಷ್ಟಕ್ಕೂ ೧೬ಯನ್ನು ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ತೀರ ಸರಳ. ಸಾರ್ಥಕ. ಈ ಸಾರ್ಥಕದಿಂದ ಹೋಗುವದಿದ್ದರೆ ಉ. ೪-೬ಕ್ಕೆ ಕೃತಿಯು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬರುವದು.

$$\frac{ಯ+೨}{೨} (೧) \quad \therefore \frac{ಯ+೨}{ಯ+೨} = ೧ + \frac{೨}{ಯ+೨}$$

$$\frac{ಯ+೫}{-೧೬} (೧) \quad \therefore \frac{ಯ-೧೧}{ಯ+೫} = ೧ - \frac{೧೬}{ಯ+೫}$$

$$\frac{೨೮-೨}{-೨} (೪) \quad \therefore \frac{೨೮-೧೯}{೨೮-೨} = ೪ - \frac{೨}{೨೮-೨}$$

ಮತ್ತು

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೦.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಜೇರಿ ಜೇರಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು ಆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಪಡಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

೧. $\frac{ಅ+ಇ+ಕ}{ಅಕಇ}$ ೩. $\frac{ಕೃ+ಗೃ+ಘೃ}{ಕಗಘ}$
೨. $\frac{ಇಯೌ-೨ಯರ+ರೌ}{ಯರ}$ ೪. $\frac{ಯೌ+ರೌ+ಲೌ-೩ಯರಲ}{ಯೌರೌಲೌ}$
೫. $\frac{೨ಕ್ಷ-೨}{(ಕ್ಷ-೩)(ಕ್ಷ-೪)}$ ೬. $\frac{೨ರ-೩}{(ಇರ-೨)(೨ರ-೧)}$
೭. $\frac{೨ಯ-೩}{ಯೌ-೩ಯ+೨}$ ೮. $\frac{೩ಯ+೬}{೨ಯೌ+೨ಯ+ಇ}$
೯. $\frac{೨ನ}{ನೌ-೪}$ ೧೦. $\frac{೧೦ಪ}{೨೫ಪೌ-೯}$ ೧೧. $\frac{೮}{೧೬-ಪೌ}$
೧೨. $\frac{೬}{ಅೌ-೯}$ ೧೩. $\frac{೪}{ಯೌ+೧೨ಯ+೩೨}$ ೧೪. $\frac{೨ಪೌ+೨ಮೌ}{ಪೌ-ಮೌ}$
೧೫. $\frac{೨ಪೌ}{ರ೪-ಸ೪}$ ೧೬. $\frac{೨ಪೌ}{ಪ೬-ಮ೬}$ ೧೭. $\frac{೨ಯೌ+೧೮}{ಯೌ-೯}$
೧೮. $\frac{೨ಯೌ+೨ರೌ}{ಯ೪+ಯೌರೌ+ರೌ}$

ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ತ್ರಿಪದಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಕೇಷ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಈ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

೧೯. $೧ \div (೧+ಅ)$ ೨೦. $೧ \div (೧-ಅ)$
೨೧. $(೧+ಅ) \div (೧-ಅ)$ ೨೨. $ಪ \div (೧+ಪ)$
೨೩. $(೧+ಪೌ) \div (೧+ಪೌ)$ ೨೪. $೧ \div (೧+ಅೌ)$

೧೧.

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳು.

೫೧೮. ಕೆಲವು ಸಲ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದ ತರಹದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ.೧. $\frac{ವ+೪}{ವ+೪} - \frac{೪}{ವ+೪}$ ಇದಕ್ಕೆ $೧ + \frac{೨}{ವ+೨}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ವ+೪}{ವ+೪} - \frac{೪}{ವ+೪} \right) \left(೧ + \frac{೨}{ವ+೨} \right) \\ &= \frac{(ವ+೪)-೪}{ವ+೪} \times \frac{ವ+೨+೨}{ವ+೨} \\ &= \frac{ವ+೪-೪}{ವ+೪} \times \frac{ವ+೪}{ವ+೨} \\ &= \frac{(ವ+೨)(ವ+೨)}{ವ+೪} \times \frac{ವ+೪}{ವ+೨} \\ &= ವ+೨. \end{aligned}$$

ಉ. ೨. $\frac{ರ-೩}{ರ+೨} + \frac{೨ರ+೧೪}{ರ+೪ರ+೨}$ ಇದಕ್ಕೆ

$\frac{ರ-೧}{ರ+೨}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ರ-೩}{ರ+೨} + \frac{೨ರ+೧೪}{ರ+೪ರ+೨} \right) \div \left(\frac{ರ-೧}{ರ+೨} \right) \\ &= \frac{(ರ-೩)(ರ+೪ರ+೨) + ೨ರ+೧೪}{ರ+೪ರ+೨} \div \frac{(ರ-೧)(ರ+೨)+೧೨}{ರ+೨} \\ &= \frac{ರ^2 + ೪ರ^2 - ೧೨ರ - ೨೪ + ೨ರ + ೧೪}{ರ+೪ರ+೨} \div \frac{ರ^2 + ೩ರ - ೨ + ೧೨}{ರ+೨} \\ &= \frac{ರ^2 + ೪ರ^2 + ೩ರ - ೧೦}{ರ+೪ರ+೨} \div \frac{ರ^2 + ೩ರ + ೧೦}{ರ+೨} \end{aligned}$$

$$= \frac{(c-1)(c+2)(c+3)}{(c+1)(c+2)} \times \frac{c+3}{(c+2)(c+3)}$$

$$= \frac{c-1}{c+1}$$

ಉ. ೩. $\frac{n+4}{n+2} + \frac{2n+10}{n+4} - \frac{3n+12}{n+2}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\frac{n+4}{n+2} + \frac{2n+10}{n+4} - \frac{3n+12}{n+2}$$

$$= \left(1 + \frac{2}{n+2}\right) + \left(2 + \frac{6}{n+4}\right) - \left(3 + \frac{6}{n+2}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{n+2} + \frac{6}{n+4} - \frac{6}{n+2} \quad \dots (1)$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{6}{n+4} - \frac{4}{n+2} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$= \frac{2(n+4) - 4(n+2) + 6(n+2)}{(n+2)(n+4)(n+2)} \quad (3)$$

$$= \frac{2(n^2+4n+8) - 4(n^2+2n+4) + 6(n^2+2n+4)}{(n+2)(n+4)(n+2)} \quad (4)$$

$$= \frac{2n^2+8n+16 - 4n^2-8n-16 + 6n^2+12n+24}{(n+2)(n+4)(n+2)} \quad (5)$$

$$= \frac{4n^2+4n+4}{(n+2)(n+4)(n+2)} \quad \dots \dots \dots (6)$$

ಉ. ೪. $\frac{y^2}{y+1} - \frac{2y^2+4y+2}{y+2} + \frac{y^2+4y+4}{y+2}$

ಇದರ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\frac{2y^2+4y-2}{y+2} + \frac{y^2+4y+4}{y+2}$$

$$= \frac{ಯ-೧+೧}{ಯ+೧} - \frac{೨ಯ(ಯ+೨)+೨}{ಯ+೨} + \frac{ಯ-೨+೨ಯ+೨+೧}{ಯ+೩} \dots \dots \dots (೧)$$

$$= \frac{(ಯ-೧)(ಯ+೧)+೧}{ಯ+೧} - \frac{೨ಯ(ಯ+೨)+೨}{ಯ+೨} + \frac{(ಯ+೧)(ಯ+೩)+೧}{ಯ+೩} \dots \dots \dots (೨)$$

$$= ಯ-೧ + \frac{೧}{ಯ+೧} - ೨ಯ - \frac{೨}{ಯ+೨} + ಯ+೧ + \frac{೧}{ಯ+೩} \dots \dots \dots (೩)$$

$$= \frac{೧}{ಯ+೧} - \frac{೨}{ಯ+೨} + \frac{೧}{ಯ+೩} \dots \dots \dots (೪)$$

$$= \frac{(ಯ-೨)(ಯ-೩) - ೨(ಯ-೧)(ಯ-೨) - (ಯ-೧)(ಯ-೨)}{(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)} \dots \dots \dots (೫)$$

$$= \frac{(ಯ-೨)(ಯ-೩) - ೨(ಯ-೨)(ಯ+೩) + ಯ+೩(ಯ+೨)}{(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)} \dots \dots \dots (೬)$$

$$= \frac{೨}{(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)} \dots \dots \dots (೭)$$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಂಶಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರಿಂದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು ಇದ್ದರೆ ಕೃತಿಯು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿತ್ತು ಮತ್ತು ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೩೧.

೧. ಯ-೫ + $\frac{೫}{೨ಯ-೨}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ - $\frac{೪}{೨ಯ-೫}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೨. $೨ಯ + ೨ + \frac{೧೬}{ಯ-೨}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ - $\frac{೪}{೨ಯ-೨}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೩. $\frac{೬}{೬} + \frac{೬}{೬}$ ಇದಕ್ಕೆ $\frac{೧}{೬} - \frac{೧}{೬} + \frac{೧}{೬}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೪. $\frac{ಪೌ}{ಮೌ} + ೧ + \frac{ಮೌ}{ಪೌ}$ ಇದಕ್ಕೆ $\frac{೧}{ಮೌ} + \frac{೧}{ಪಮ} + \frac{೧}{ಪೌ}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೫. $ನೌ + ನಮ + ಮೌ + \frac{೨ಮೌ}{ನ-ಮ}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ + $\frac{೨ಮ}{ನ-ಮ}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೬. $ಯೌ + ಪೌ - \frac{ಯೌಮೌ}{ಯೌ + ಮೌ}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ - $\frac{ಯಮ}{ಯೌ + ಮೌ}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೭. $ಪ-೨ + \frac{೪}{ಪ-೨}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ + $\frac{೨}{ಪ-೨}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೮. $೧ + \frac{ಮೌ}{ಪೌ} - \frac{ಮೌ}{ಮೌ}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ + $\frac{೨ಪಮ}{(ಪ-ಮ)ೌ}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಗಳಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೯. $\frac{ರ-೪}{ರ-೧} - \frac{೨ರ-೬}{ರ-೨} + \frac{ರ-೨}{ರ-೩}$

೧೦. $\frac{೮ಯ-೨೦}{ಯ-೪} + \frac{೨ಯ-೫}{ಯ-೨} - \frac{೧೦ಮ+೬೧}{ಯ+೬}$

೧೧. $\frac{೩ಯೌ-೧೦ಯ+೪}{ಯ-೨} + \frac{೨ಯ-೫ಯ+೩}{ಯ-೨}$
 $-\frac{೫ಯ-೭ಯ+೪}{ಯ-೧}$

೧೨. $\frac{ಪೌ+೨ಪಮ+ಮೌ+೧}{ಪ+ಮ} - \frac{೨ಪೌ+೪ಪಮ+೨}{ಪ+೨ಮ}$
 $+ \frac{ಪೌ-೨ಪಮ+ಮೌ+೧}{ಪ-ಮ}$

ಆರವೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ
ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

೧.

೬.೧. ಮುಂದೆ ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪು. ೨೧-೫೪ ಮತ್ತು ೨೦೯-೨೨೨) ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಪರಿಹರಿಸುವುದು ಅಂದರೆ ಮೇಲೆ ಅಪುಗಣಗಳಿಗಿನ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು (ಹೆಲಿಗಳನ್ನು) ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನಾನು ನೋಡಿದ್ದೇನೆ. ಇಂದು ಈಗ ಅದೇ ವಿಷಯದ ಮುಂದೆ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕ ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಜೋಡಿಯೊಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವು ಸಾಧಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿರದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಅದಕ್ಕೆ ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಂತೆ, (ಅಯ + ಇರ = ಕ) ಈ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು.

ಉ.೧. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$ಚ(ಯ - ೩ರ) - ೨(೨ಯ + ೪ರ - ೧೦) = ೩ - ೪ಯ;$$

$$೮(೨ರ - ಯ) + ೫(೨ಯ - ೪ರ + ೧) = ೩(ಯ + ೪) - ೪.$$

$$\text{ಮೊ. ಸ. ಬಿಡಿಸಿ, } ೫ಯ - ೧೫ರ - ೨ಯ - ೪ರ + ೨೦ = ೩ - ೪೫$$

$$\therefore -ಯ - ೨೩ರ + ೨೦ = ೩ - ೪೫$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } -ಯ - ೨೩ರ + ೪೫ = ೩ - ೨೦$$

$$\therefore ೩ಯ - ೨೩ರ = -೧೭ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೧)$$

$$\text{ಎ. ಸ. ಬಿಡಿಸಿ, } ೧೬ರ - ೮ಯ + ೧೦ಯ - ೨೦ರ + ೫ = ೩ಯ + ೩ರ - ೪$$

$$\therefore ೨ಯ - ೪ರ + ೫ = ೩ಯ + ೩ರ - ೪$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } ೨ಯ - ೪ರ - ೩ಯ - ೩ರ = -೪ - ೫$$

$$\therefore -ಯ - ೭ರ = -೯ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೨)$$

$$೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, -೩ಯ - ೨೧ರ = -೨೭ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೩)$$

$$(೧) \text{ ಮತ್ತು } (೩) \text{ ಇವುಗಳ ವೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ } -೪೪ರ = -೪೪$$

$$\therefore ರ = ೧$$

(೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರ = ೧ ಎಂದು ಹಿಡಿದು, —ಯ—೩ = —೯
 ಅಂ. —ಯ = —೨, ಅಂ. ಯ = ೨.
 ಯ = ೨, ರ = ೧.

ಉ.೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\text{ಯ} - \frac{\text{೩ರ} - \text{೨ಯ} - ೧}{೪} = \frac{\text{೨ಯ} - \text{೩ರ} + ೧}{೩} - ೧;$$

$$\text{೩ರ} - \frac{\text{೫ರ} - \text{ಯ} + ೨}{೫} = \text{೪ಯ} - ೩ - \frac{\text{೩ಯ} + ೨ರ}{೨}.$$

ವೆ.ಎ.ಕೈ ಅಳಿ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$\begin{aligned} & ೨ಯ - ೩(೩ರ - ೨ಯ - ೧) = ೪(೨ಯ - ೩ರ + ೧) - ೩೪ \\ \therefore & ೨ಯ - ೯ರ + ೬ಯ + ೩ = ೧೬ಯ - ೧೨ರ + ೪ - ೩೪ \\ \therefore & ೩೦ಯ - ೯ರ + ೩ = ೧೬ಯ - ೧೨ರ - ೩೦ \end{aligned}$$

ಪಕ್ಷಾಂತರವಿಡಿದು, ೩೦ಯ - ೯ರ - ೧೬ಯ + ೧೨ರ = -೧೬ - ೩

$$\therefore ೧೪ಯ + ೪೨ರ = -೧೯ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೧)$$

ಎ.ಸ.ಕೈ ೧೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$\begin{aligned} & ೩೦ರ - ೨(೫ರ - ಯ + ೨) = ೪೦ಯ - ೩೦ - ೫(೩ಯ + ೨ರ) \\ \therefore & ೩೦ರ - ೧೦ರ + ೨ಯ - ೪ = ೪೦ಯ - ೩೦ - ೩೫ಯ - ೧೦ರ \\ \therefore & ೧೦ರ + ೨ಯ - ೪ = ೫ಯ - ೧೦ರ - ೩೦ \end{aligned}$$

ಪಕ್ಷಾಂತರವಿಡಿದು, ೧೦ರ + ೨ಯ - ೫ಯ + ೧೦ರ = -೩೦ + ೪

$$\therefore -೩ಯ + ೨೦ರ = -೨೬ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೨)$$

೧೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$-೪೨ಯ + ೨೮೦ರ = -೩೬೪$$

(೧)ಕ್ಕೆ ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೪೨ಯ + ೧೨೬ರ = -೫೭$$

ಬೇರೀಜವಿಡಿದು,

$$೪೨೬ರ = -೪೨೧$$

$$\therefore ರ = -೧.$$

(೨)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರ = -೧ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, -೩ಯ-೨೦ = -೨೬,

$$\text{ಅಂ.} -೩ಯ = -೬, \text{ ಅಂ.} ಯ = ೨.$$

$$ಯ = ೨, ರ = -೧.$$

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{x-y-z-1}{x} = \frac{x+y+z-1}{2} = \frac{x-y-z-1}{2}$$

$$\frac{x-y-z-1}{x} = \frac{x-y-z-1}{2} \text{ ಮತ್ತು}$$

$$\frac{x+y+z-1}{2} = \frac{x-y-z-1}{2} \text{ ಹೀಗೆ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ}$$

ತಿಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೆವು.

$$\text{ಮೊ.ಸ.ವ ಮೇಲಿಂದ } x(y-z-1) = 2(x-y-z-1)$$

$$\therefore xy - xz - x = 2x - 2y - 2z - 2$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } xy - xz - 2x + 2y = -2 + 2z$$

$$\therefore xy - xz = 2z - 2y$$

$$x \text{ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, } y - z = 2 \quad (1)$$

$$\text{ಎ. ಸ. ವ ಮೇಲಿಂದ } 2(xy - xz - 1) = 2(x + y + z - 1)$$

$$\therefore xy - xz - 2 = x + y + z - 1$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } xy - xz - x - y - z = -1 + 2$$

$$\therefore xy - xz = 1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ ನೆಯದನ್ನು } (2) \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, } x^2 - xz = x$$

$$\text{ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ } -xz = -x - 1$$

$$\therefore z = 1$$

$$(1) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ } z = 1 \text{ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, } y - 1 = 2,$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } y = 3$$

$$x = 3; z = 1.$$

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(x+y+z)(x+y+z) - 1 = (x+y+z)(x+y+z);$$

$$(x+y+z)(x+y+z) = (x+y+z)(x+y+z) - 1.$$

ಮೊ. ಸ. ವಸ್ತು ಬಿಡಿಸಿ,

$$ಯರ + ೨ಯ + ೨ರ + ೨ = ಯರ - ೨ಯ - ೨ರ + ೨$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳೊಳಗಿಂದ ಯರ ವಸ್ತು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ,

$$೨ಯ + ೨ರ - ೨ಯ = -೨ಯ - ೨ರ + ೨$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೨ಯ + ೨ರ + ೨ಯ + ೨ರ = ೨ + ೨೨

$$\therefore ಯ + ರ = ೨೫ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೧)$$

ಎ. ಸ. ವಸ್ತು ಬಿಡಿಸಿ, ೬ ಯರ + ೨ಯ - ೨ರ - ೧ = ೬ಯರ + ಯರ - ೨ರ + -೧. ಎರಡೂ ಬದಿಗಳೊಳಗಿಂದ ೬ ಯರ ವಸ್ತು ತೆಗೆದು-
ಲಾಗಿ, ೨ಯ - ೨ರ - ೧ = ಯರ - ೧೨

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೨ಯ - ೨ರ - ಯರ = -೧೨ + ೧

$$\therefore ಯ - ೨ರ = -೧೧ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೨)$$

(೧) ನೆಯಮೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ

$$೨ರ = ೪, \text{ ಅಂ. } ರ = ೧೨.$$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರ = ೧೨ ಹಿಡಿದು, ಯ + ೧೨ = ೨೫,

$$\text{ಅಂ. } ಯ = ೨೫ - ೧೨ = ೧೩.$$

$$ಯ = ೧೩; ರ = ೧೨.$$

ಉ. ೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೬ಯ - \frac{೨೧ರ}{೨} = ೧೫೪; \quad ೧೧ಯ - \frac{೧೪೨ರ}{೨} = ೨೨.$$

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ೬ ಇದು ಅವ-
ಯವನ್ನು ಎರಡನೆಯದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ೧೧ ಇದು ಅವಯವ-
ವಿದ್ದುದು ಕೂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಿತ್ಯದ ರೂಢಿಯ ಮಾರ್ಗದಿಂದ-
ಹೋಗಿದೇ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು
ಮುಂದಿನಂತೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಮೊ. ಸ. ವಸ್ತು ಒಂದರ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಯ - ೨ರ = ೨೨ \dots \dots (೧)

ಎ. ಸ. ವಸ್ತು ೧೧ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಯ - \frac{೧೪೨ರ}{೨} = ೨ \dots \dots (೨)

ವಜಾಣಾಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, \quad \quad \quad ೫ ರ = ೨೦

11) ಡಿ. ಎ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೬೧

$$\therefore r = 4$$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $r = 4$ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

$$y - 2 = 2x, \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } y = 2x + 2.$$

$$y = 2x; r = 4.$$

ಉ. ೬. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$4x + y = 12; 3x + y = 9.$$

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ,

$$4x + y + 3x + y = 12 + 9$$

೭x ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ,

$$y + r = 2 \dots (೧)$$

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದರೆ, $4x + y = 12$

$$\therefore -y + r = 6 \dots (೨)$$

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಜೋಡಿಸಿದರೆ,

$$2r = 8, \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } r = 4. \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } y = 2.$$

$$y = 2; r = 4.$$

ಉ. ೭. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$2x + y = 12; 3x + y = 9.$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಸನ್ನು ಮಾಡಿ

$$2x + y + 3x + y = 12 + 9$$

ಮತ್ತು ೫ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ,

$$5x + 2y = 21 \dots (೧)$$

ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ,

$$2x + y = 12 \dots (೨)$$

(೧) ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$4x + 2y = 24 \dots (೩)$$

(೩) ನೆಯದರೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ $y = 12$

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ $y = 12$ ಎಂದು ಹಾಕಿ,

$$2x + 12 = 12, \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } 2x = 0, \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } x = 0.$$

$$\therefore y = 12; x = 0.$$

ಉ. ೮. ಬಿಡಿಸಿರಿ : $2x - y = 12; 3x + y = 9.$

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ

$$2x - y - 3x - y = 12 - 9$$

ಉಂ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $ಯ - ರ = - ೨$

ಈಗ $೧೧೭ಯ + ೩೭ರ = ೮೬$, $೮೦ಯ + ೩೭(ಯ - ರ) = ೮೬$
 $\therefore ೮೦ಯ + ೩೭(-೨) = ೮೬$, $೮೦ಯ = ೮೬ + ೭೪ = ೧೬೦$.

$\therefore ಯ = ೨$; $ರ = ೪$.

ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪವಾದ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಷ್ಟು ಬೇಗನೆ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸ ರೀತಿ (ಇಲ್ಲವೆ ಕತ್ತರಿಯ ನಿಯಮ)

೬.೨. ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದು ಅವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಮೂರು ರೀತಿಗಳನ್ನು — ಯೋಗವಿಯೋಗ ರೀತಿ, ಉತ್ಥಾಪನ (ಇಲ್ಲವೆ ಅದೇಶ) ರೀತಿ, ಮತ್ತು ತುಲನೆಯ ರೀತಿ— ಹಿಂದೆ ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

ಯಾವದೇ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸಾದಾ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿ ಅದನ್ನು $ಅಯ + ಇರ + ಉ = ೦$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$ಅಯ + ಇರ + ಉ = ೦$ (೧) ಮತ್ತು

$ಅಯ + ಈರ + ಊ = ೦$ (೨) ಇದು ಒಂದು

ಜೋಡಿ ಇದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು ಯ ಮತ್ತು ರ ಈ ಅಂಶಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

(೧) ನೆಯದನ್ನು ಈ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ, $ಅಯ + ಇಈರ + ಈಉ = ೦$ ಮತ್ತು (೨) ನೆಯದನ್ನು ಇ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ, $ಅಇಯ + ಇಇರ + ಇಊ = ೦$ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, $(ಅಈ - ಅಇ)ಯ + ಈಉ - ಇಊ = ೦$ ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $(ಅಈ - ಅಇ)ಯ = ಇಊ + ಈಉ$

ಯ

೧

$\therefore ಇಊ + ಈಉ$

$ಅಈ - ಅಇ$

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೭೩

ಅದರಂತೆಯೇ (೨) ನೇಯದನ್ನು ಆ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಅಆಯ+ಆಈರ+ಉಆ=೦,

ಮತ್ತು (೧) ನೇಯದನ್ನು ಆ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಅಆಯ+ಆಈರ+ಉಆ=೦

ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, (ಅಈ-ಆಇ)ರ+ಉಆ-ಉಆ=೦

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ (ಅಈ-ಆಇ)ರ = ಉಆ-ಉಆ

$$\therefore \frac{ರ}{ಉಆ-ಉಆ} = \frac{೧}{ಅಈ-ಆಇ}$$

$$\therefore \frac{ಯ}{ಇಊ-ಈಉ} = \frac{ರ}{ಉಆ-ಉಆ} = \frac{೧}{ಅಈ-ಆಇ}$$

ಇದಕ್ಕೆ ವಜ್ರಾಭಾಸದ ಇಲ್ಲವೆ ಕತ್ತರಿಯ ನಿಯಮವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವ ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯು ಹೀಗೆ ಇರುವದು. ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ನಡುವಿನ ಪದದ ಸಹಗುಣಕದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಆ ಸಹಗುಣಕವನ್ನೂ, ಸ್ಥಿರಪದವನ್ನೂ, ಮೊದಲನೇ ಪದದ ಸಹಗುಣಕವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಕೊನೆಗಾಗಿ ಸಿರುಗಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಸಹಗುಣಕವನ್ನೂ, ಈ ಕ್ರಮದಿಂದ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಮತ್ತು ಬಾಣಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.



ಅಭೋಮುಖ ಬಾಣಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಗುಣಾಕಾರಗಳು

ಧನ ಮತ್ತು ಉನ್ಮುಖ ಬಾಣಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟವು

ಮುಖ ಇರುವವು.

ಇಊ+ಈಉ, ಉಆ-ಉಆ ಮತ್ತು ಅಈ-ಆಇ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯೆ, ರ, ಮತ್ತು ೧ ರ ಭೇದಗಳಿರುವವು.

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವ-
ದಕ್ಕಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಉ. ೨. ರೊಳಗಿನ $೧೪ಯ + ೪೭ರ + ೧೯ = ೦$
ಮತ್ತು $೩ಯ - ೨೦ರ - ೨೬ = ೦$

ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ; ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಂತೆ,

$$\frac{ಯ}{೪೭(-೨೬)} - \frac{ರ}{(-೨೦)೧೯} = \frac{ರ}{೧೯ \cdot ೩} - \frac{(-೨೬)೧೪}{೧}$$

$$\frac{೧೪(-೨೦)}{೧} - ೩ \cdot ೪೭$$

$$\therefore \frac{ಯ}{-೧೨೨೦ + ೩೪೦} = \frac{ರ}{೫೭ + ೩೬೪} = \frac{೧}{-೨೦ - ೧೪೧}$$

$$\therefore \frac{ಯ}{-೮೮೦} = \frac{೪೭೧}{-೪೭೧}$$

$$\therefore ಯ = \frac{-೮೮೦}{-೪೭೧} = ೨ \text{ ಮತ್ತು } ರ = \frac{೪೭೧}{-೪೭೧} = -೧$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

೧. $\frac{ಯ}{೩} + \frac{ರ}{೪} = ೭$; $ಯ - ರ = ೧೪$.

೨. $\frac{ಪ-ಮ}{೩} + \frac{ಪ+ಮ}{೪ರ} = ೫$; $\frac{ಪ-ಮ}{೪} - \frac{ಪ+ಮ}{೩} = ೫$.

೩. $\frac{ದ+೯}{೯} = \frac{೪೩}{೩}$; $\frac{ದ}{೯-೧} = \frac{೨೩}{೩}$.

೪. $೫ನ + ೨ಮ = ೩ನ + ೫ಮ = ೧೯$.

೫. $೩ಯ - ೮ರ + ೪ = ೫ಯ - ೧೨ರ + ೩೩ = ೬ಯ - ೪ರ - ೯$.

೬. $\frac{ಪ+ಮ-೧}{೫} = \frac{ಪ-ಮ+೧}{೪} = ೧$.

೭. $\frac{೫}{ಯ-೮} = \frac{೨೦}{ಯ+೮} = \frac{೧}{೨}$.

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೬೫

$$ಫ. ೪(೩ಯ-೮)=೧೮ \left(\frac{ಯ}{೨} - \frac{೮}{೪} \right) = ೯.$$

$$ಫ. \frac{೧}{೨} (೧೩-೩ಯ-೮) = \frac{೨}{೩} (೩-ಯ-೨೮) = \frac{೧}{೫} (೮-೨ಯ-೩೮).$$

$$೧೦. \frac{೨೮+೮ವ}{೧೬} = \frac{೧೫}{೨} = \frac{೧೫(೮-ವ) - (೨೫ವ-೯೮)}{೯೦}.$$

$$೧೧. \frac{೩ನ}{೧೦} = \frac{೩ವ}{೮} = ೫; \frac{೩ನ}{೫} + \frac{೪ವ}{೩} + \frac{೧}{೩} = ೦.$$

$$೧೨. \frac{೩}{೨} + \frac{ನ}{೩} = ೨೦; \frac{೩ನ}{೫} - \frac{೫ತ}{೯} + \frac{೧}{೯} = ೩.$$

$$೧೩. \frac{೫ಯ-೨೮}{೮ಯ+೮} = \frac{೧}{೧೦}; ೩(ಯ+೮+೨)=೫(೮-೩ಯ+೫)+೯.$$

$$೧೪. \frac{೫ಯ-೮}{೨ಯ-೧} = \frac{೫೮+೧}{೨೮+೩}; \frac{೪ಯ-೩}{೮ಯ-೯} = \frac{೩೮+೨}{೩೮+೧}.$$

$$೧೫. \frac{೮}{ಕ} - \frac{೩}{ನ} = \frac{೪}{ಕನ}; \frac{೫}{ಕ} + \frac{೨}{ನ} = \frac{೧೮}{ಕನ}.$$

$$೧೬. \frac{೧೨}{೪} + ೮ = \frac{೧೫ಯ}{೪}; ಯ + ೩ \frac{೧}{೨} = \frac{೩೪}{ಯ}.$$

$$೧೭. ೮(ಪ-೩)+೨(೪-೮)=೨;$$

$$\frac{೧೧}{ಪ+೩} + \frac{೩}{೮+೮} = ೪ \left(\frac{೧೦}{ಪ+೩} - \frac{೩}{೮+೮} \right).$$

$$೧೮. ೧೯ \left(\frac{೪}{೮-ಕ} + \frac{೩}{೨೮+೩ಕ} \right) = ೩೫ \left(\frac{೨}{೮-ಕ} + \frac{೫}{೨೮+೩ಕ} \right);$$

$$೩(೮-೩ಕ+೩) = ೧೫-೪(೩ಕ-೮-೧).$$

$$೧೯. \frac{೩ಯ+೩೮}{೫೮-೧೨ಯ} = ೨; ೮(೩ಯ-೪೮+೫) =$$

$$೫(೩೮-೮ಯ+೨).$$

೨೦. ೨೭ಯ + ೪೯ರ = ೧೦೩; ೪೯ಯ + ೨೭ರ = ೧೨೫.

೨೧. ೧೦೨ರ - ೭೯ವ = ೪೨೩; ೭೯ರ - ೧೦೨ವ = ೪೫೩.

೨೨. ೧೨೫ಯ + ೮೭ಕ್ಷ = ೪೯; ೩೭ಯ + ೨೧ಕ್ಷ = ೫.

೨೩. ೧೦೩ರ - ೩೩ಸ = ೨೭೬; ೩೩ರ + ೩೭ಸ = ೧೩೬.

೨.

$$\frac{ಅ}{ಯ} + \frac{ಇ}{ರ} = ಉ; \frac{ಆ}{ಯ} + \frac{ಈ}{ರ} = ಊ.$$

೩.೩. ಈಗ $\frac{೨}{ಯ} + \frac{೧೫}{ರ} = ೪$ (೧); $\frac{೩}{ಯ} + \frac{೧೦}{ರ} = ೩೩$ (೨)

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರಕಾರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪವು ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಬಿಡಿಸಿದ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪದಂತಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಬೇರೆ ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಯ, ರ) ಅಂಶಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರದೆ ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿವೆ.

ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುವದು? ಇಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು ರ ಇವುಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು ಮ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

$$೨ಪ + ೧೫ಮ = ೪ \dots\dots (೩) \text{ ಮತ್ತು}$$

$$೩ಪ + ೧೦ಮ = ೩೩ \dots (೪) \text{ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ತರುವಾಯ}$$

$$(೩)ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ \quad ೬ಪ + ೪೫ಮ = ೧೨$$

$$\text{ಮತ್ತು } (೪) \text{ ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ \quad ೬ಪ + ೨೦ಮ = ೬೬}$$

$$\text{ವಜಾಬಾಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ \quad ೨೫ಮ = ೫, ಆಂ. ಮ = ೧/೫.}$$

$$(೩) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ \quad ಮ = ೧/೫ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,}$$

$$೨ಪ + ೩ = ೪, ಆಂ. ೨ಪ = ೧, ಆಂ. ಪ = ೧/೨$$

$$\therefore ಪ = ೧/೨ \text{ ಮತ್ತು ಮ = ೧/೫}$$

$$\therefore ಯ = ೨; \quad ರ = ೫.$$

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೬೭

ಆದರೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{೧}{ಯ}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{ರ}$ ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಪ ಮತ್ತು ಮ ಗಳಿಂದ ಮಾಡದೇ ಕೂಡ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಸರಳವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು.

$$(೧) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೩ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೬}{ಯ} + \frac{೪೫}{ರ} = ೧೨ \text{ ಮತ್ತು}$$

$$(೨) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೨ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೬}{ಯ} + \frac{೨೦}{ರ} = ೭$$

ವಜಾಬಾಕೆಯಿಂದ $\frac{೨೫}{ರ} = ೫,$

$$ಅಂ ರ = ೫.$$

$$(೧) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ } ರ = ೫ \text{ ಎಂದು ಹಿಡಿದು } \frac{೬}{ಯ} + ೩ = ೪,$$

$$ಅಂ. \frac{೬}{ಯ} = ೧, \text{ ಅಂ } ಯ = ೬. \text{ ಯ} = ೬; ರ = ೫.$$

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವ ಮಾರ್ಗವು ನಮಗೆ ಸರಿ ಬರುವದೋ ಅವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕು. ಎರಡನೆಯದು ಸುಲಭವಾದದ್ದು.

ಈಗ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು ರ ಈ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ೧ ಇರದೇ ೧ ರಿಗಿಂತ ಜೇರೆ ಇವೆ.

$$\text{ಉ. ೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: } \frac{೮}{೨ಯ} - \frac{೩}{೨ರ} = ೧೧; ೨ಯ + \frac{೫}{೨ರ} = \frac{೩೧}{೪}.$$

ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ೨ ಮತ್ತು ೨ ಇವುಗಳ ೮. ಸಾ. ಮ. ೬ ಇದರಿಂದ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೨ ಮತ್ತು ೮ ಇವುಗಳ ೮. ಸಾ. ಮ. ೮ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ,

$$\frac{೧೬}{ಯ} - \frac{೯}{ರ} = ೬೬ \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{೧೨}{೪} + \frac{೫}{೮} = ೨೬ \dots (೨)$$

$$(೧) \text{ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೪೮}{೪} - \frac{೨೭}{೮} = ೧೯೮$$

$$\text{ಮತ್ತು (೨)ನೆಯದನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೪೮}{೪} + \frac{೨೦}{೮} = ೧೦೪$$

$$\text{ಪದ್ಧತಿಬಾಕಿಯಿಂದ, } - \frac{೪೭}{೮} = ೯೪$$

$$\therefore ೮ = - ೭$$

೨ನೆಯದರಲ್ಲಿ $೮ = - ೭$ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

$$\frac{೧೨}{೪} - ೧೦ = ೨೬, \text{ ಅಂದರೆ } \frac{೧೨}{೪} = ೩೬, \text{ ಅಂದರೆ } ೪ = \frac{೧}{೩}$$

$$\therefore ೪ = \frac{೧}{೩}; \quad ೮ = \frac{೧}{೨}$$

ಈಗ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಅವರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿವೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅವು ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲ.

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{೫}{೨೪} - \frac{೮}{೩೨} = ೬ \frac{೫}{೪}; \quad ೧೨೪ + ೨೮ = ೯೪೮.$$

ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ (ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ೪ ರ ಗಳು ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದರ ಮಾನವು ಶೂನ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹಿಡಿಯಲು ಯಾವುದೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.)

$$\frac{೧೨}{೮} + \frac{೨}{೪} = ೯ \text{ ಅಂದರೆಯೇ } \frac{೨}{೪} + \frac{೧೨}{೪} = ೯.$$

$$\text{ಮೊ. ಸ. ವನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, } \frac{೧೫}{೪} - \frac{೧೬}{೮} = ೪೧ \dots (೧)$$

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿ ನೆಪ್ರತ್ಯೆಗಳು ೧೬೯.

ಮತ್ತು
$$\frac{5}{ಯ} + \frac{೧೨}{೮} = ೯ \dots (೨)$$

ನಿತ್ಯದಂತೆ $\frac{೧}{ಯ}$ ಮತ್ತು $\frac{೧೨}{೮}$ ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಆ ಮತ್ತು ಕ ಗಳಿಂದ

ಮಾಡಿದರೆ, $೧೫೮ - ೧೬೮ = ೪೧ \dots (೩)$

ಮತ್ತು $೨೮ + ೧೨೮ = ೯ \dots (೪)$

(೩) ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $೪೫೮ - ೪೮೮ = ೧೨೩$ ಮತ್ತು

(೪) ನೆಯದನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $೨೮ + ೪೮೮ = ೩೬$
 ದೇವೀಜಿನಿಂದ $೫೩೮ = ೧೫೯, ೮೦. ೮ = ೩.$

(೪) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $೮ = ೩$ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, $೬ + ೧೨೮ = ೯$ ಅಂ. ೧೨೮. $= ೩,$
 ಅಂ. ಕ = ೪.

$\therefore ೮ = ೩, ಮತ್ತು ಕ = ೪.$

$\therefore ಯ = ೪; ರ = ೪.$

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$೪೮ - ೫೮ = ೦; ೨೮ - ೧೫೮ = ೧೨.$

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೇಲಿಂದ $೪೮ = ೫೮.$ ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $೪೮,$ ದ ಬದಲಾಗಿ ೫೮ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$\frac{೨}{೧೦೮} - \frac{೧}{೧೫೮} = \frac{೧}{೧೨} ೮೦. ೨೦೮ = \frac{೧}{೧೨},$

$೮೦. ೨೦೮ = \frac{೧}{೧೨} ೮೦. ೨೦೮ = ೬,$

೮೦. $೮ = ೪, ಮತ್ತು ೪೮ = ೫೮$ ಇದ್ದುದರಿಂದ

$೪೮ = ೧, ೮೦. ೮ = ೪, ೮ = ೪.$

ಉ. ೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$೨೮ - ೩೮ = ೧; \frac{೧}{೨೮} - \frac{೫}{೩೮} = ೦.$

ಎರಡನೇ ಸಮೀ- ೧ = $\frac{೫}{೬}$ ಅಂ. ೬ಕ = ೧೫ಅ, ಅಂ. ೩ಕ = ೭೫ಅ.
ಕರಣದ ಮೇಲಿಂದ ೩ಅ = $\frac{೬}{೬}$ ಕ

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ೩ಕ, ದ ಬದಲಾಗಿ ೭೫ ಅ ಇಟ್ಟರೆ,

$$೮ಅ - ೭೫ಅ = ೧, \text{ ಅಂ. } ೫೫ಅ = ೧, \text{ ಅಂ. } ಅ = \frac{೧}{೫೫}.$$

ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅ = $\frac{೧}{೫೫}$ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

$$೧೬ - ೩ಕ = ೧, \text{ ಅಂ. } ೩ಕ = ೧೫, \text{ ಅಂ. } ಕ = ೫. \text{ ಅ = } \frac{೧}{೫೫}; ಕ = ೫.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೩.

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೧. \frac{೧೭}{೪} - \frac{೭}{೮} - ೫ = ೦; \frac{೧೦}{೪} - \frac{೧೧}{೮} + \frac{೧}{೩} = ೦.$$

$$೨. \frac{೭೫}{೯} - \frac{೬}{೪} - ೯ = ೦; \frac{೧೫}{೯} + \frac{೪}{೯} = \frac{೧}{೩}.$$

$$೩. \frac{೧}{೪} + \frac{೧}{೪} = \frac{೫}{೯}; \frac{೭}{೪} - \frac{೮}{೪} = \frac{೫}{೯}.$$

$$೪. \frac{೭}{೭೪} - \frac{೫}{೭೪} = \frac{೫}{೭೪}; \frac{೫}{೭೪} + \frac{೩}{೮} = \frac{೫೫}{೭೪}.$$

$$೫. \frac{೫}{೮೪} - \frac{೭}{೭೪} + \frac{೩}{೪} = ೦; \frac{೯}{೮೪} + \frac{೧೧}{೭೪} = \frac{೧೫}{೭೪}.$$

$$೬. ೫ಅ - ೯ಇ + ೯೦ಅ = ೦; \frac{೫}{೬} + \frac{೧}{೬} = ೦.$$

$$೭. ೧೦ಅ = ೯ಅ + ೧೬ಇ; \frac{೧}{೬} - \frac{೧}{೬} = \frac{೧}{೬}.$$

$$೮. ೭೪ಯ + ೧೪ರ - ೪ರ = ೦; ೩ಯ + ೭ರ - ೭೪ಯರ = ೦.$$

$$೯. ೫ಲ + ೩ವ - ೧೬ಲವ = ೦; \frac{೪}{೮} + \frac{೭}{೪} + ೩ = ೦.$$

$$೧೦. (೩ಕ - ೩)(೩ನ - ೪) = ೧೨ = \frac{೪೫}{೬} + \frac{೪}{೯}$$

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೭೧.

$$೧೧. ೫ರ - \frac{೨}{೨೨} = ೧೦\frac{೧}{೯}; ೮ರ + \frac{೧೨}{೫೨} = ೧೫\frac{೨}{೫}$$

$$೧೨. ೨೫ - ೨\frac{೨}{೫} = \frac{೬}{೫೨}; ೧೦೫ = \frac{೯}{೪೨} + ೧೯\frac{೧}{೪}$$

$$೧೩. \frac{೨+೮}{೨೮} = \frac{೨}{೪}, \frac{೨-೮}{೨೮} = \frac{೧}{೪}$$

$$೧೪. \frac{೮}{೮} + \frac{೨}{೪} = ೦; ೮೮ + ೨೪ = ೨೨೨.$$

$$೧೫. \frac{೨೫}{೨} - \frac{೧೪}{೨} = \frac{೨೫+೨೨}{೨೨} + ೧\frac{೨}{೨೨}; ೨೪೨೨=೨೫(೨೨-೨೨)...$$

೩.

೬.೪. ಈಗ ದ್ವಿವರ್ತ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಈ ಪ್ರಕಾರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{೫}{೨೨-೨೮} + \frac{೨}{೪೨+೮} = ೧\frac{೨}{೨೨} \quad \dots \quad \dots \quad (೧)$$

$$\frac{೮}{೨೨-೨೮} - \frac{೫}{೪೨+೮} = ೧\frac{೨}{೨೨} \quad \dots \quad \dots \quad (೨)$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು $\frac{೨}{೨೨-೨೮}$ ಮತ್ತು $\frac{೨}{೪೨+೮}$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ತರುವಾಯ ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ $\frac{೨}{೨೨}$ ಮತ್ತು $\frac{೮}{೪೨}$ ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ,

$$(೧) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೫ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೨೫}{೨೨-೨೮} + \frac{೧೦}{೪೨+೮} = ೨\frac{೧೦}{೨೨}$$

$$(೨) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೨ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೨೪}{೨೨-೨೮} - \frac{೧೦}{೪೨+೮} = ೨\frac{೨}{೨೨}$$

$$\text{ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ } \frac{೨೪}{೨೨-೨೮} = ೧೨\frac{೨}{೨೨} = ೨\frac{೨}{೨೨}.$$

$$\therefore \text{೩ಯ} - \text{೨ರ} = ೪ \quad (೩)$$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ೩ಯ - ೨ರ = ೪ ಎಂದು ಇಡಲಾಗಿ,

$$\frac{೫}{೪} + \frac{೩}{೪ಯ + ೨ರ} = \frac{೧೩}{೧೩}$$

$$\therefore \frac{೩}{೪ಯ + ೨ರ} = \frac{೧೩}{೧೩} - \frac{೫}{೪} = \frac{೩}{೪}$$

$$\therefore ೪ಯ + ೨ರ = ೯. \quad (೪)$$

(೪) ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ೮ಯ + ೨ರ = ೧೮ (೫)

(೩) ಮತ್ತು (೫) ಇವುಗಳ ಜೇರಿ. ೩ಯ - ೨ರ = ೪

ಜನ್ನು ಮಾಡಿ

$$\frac{೮ಯ + ೨ರ = ೧೮}{೧೧ಯ} = \frac{೨೨}{೧೧}, \text{ ಅಂ.ಯ} = ೨.$$

(೩) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ = ೨ ಇಡಲಾಗಿ ೩ - ೨ರ = ೪

$$\therefore -೨ರ = ೪ - ೩ = -೧ \text{ ಅಂ. ರ} = ೧.$$

$$\text{ಯ} = ೨; \text{ರ} = ೧.$$

ಉ. ೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$\frac{೪}{೩ಯ - ೪ರ} - \frac{೧}{೨ಯ + ೫ರ} = \frac{೩}{೧೦} \quad \dots \dots \dots (೧)$$

$$\frac{೮}{೯ಯ - ೧೨ರ} + \frac{೧}{೨ಯ + ೫ರ} = \frac{೩}{೧೦} \quad \dots \dots \dots (೨)$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಕಡೆಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ ಅದನ್ನು

$$\frac{೮}{೩(೩ಯ - ೪ರ)} + \frac{೧}{೨(೨ಯ + ೫ರ)} = \frac{೩}{೧೦} \text{ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು}$$

ದೊಬ್ಬರು ಕೂಡು ಬರುವುದು, ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ೧೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ

$$\frac{೪೦}{೩ಯ - ೪ರ} + \frac{೩}{೨ಯ + ೫ರ} = \frac{೩}{೨} \quad (೩) \text{ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುವುದು.}$$

ಈಗ $\frac{೧}{೩ಯ - ೪ರ}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{೨ಯ + ೫ರ}$ ಗಳಿಗಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೩

ದ್ವಿ. ಎ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೭೩

ಮತ್ತು ಕ ಈ ಅದೇಶಗಳನ್ನಿಟ್ಟರೆ, (೧) ಮತ್ತು (೩) ಗಳ ಮೇಲಿಂದ

$$೪೨ - ಕ = \frac{೧}{೧೦} \quad (೪)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೪೦೨ + ೩ಕ = ೨ \quad (೫)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವವು.

$$(೪) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೩ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, } ೧೨೬ - ೩ಕ = \frac{೩}{೧೦}$$

$$\text{ಜೇರ್ಲಿನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, } ೫೨೨ = \frac{೩}{೧೦} = \frac{೫೨೨}{೧೦}, \text{ ಅಂ. } ೨ = \frac{೫೨೨}{೧೦}.$$

$$(೪) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ } ೨ = \frac{೫೨೨}{೧೦} \text{ ಎಂದು}$$

$$\text{ಇಡಲಾಗಿ, } \frac{೧}{೧೦} - ಕ = \frac{೫೨೨}{೧೦}, \text{ ಅಂ. } ಕ = \frac{೧}{೧೦} - \frac{೫೨೨}{೧೦} = - \frac{೫೨೧}{೧೦}.$$

$$\text{ಈಗ } ೨ = \frac{೫೨೨}{೧೦} \quad \frac{೧}{೧೦} - ೪೨ = \frac{೫೨೨}{೧೦}, \text{ ಅಂ. } ೨ಯು = ೪೨ = ೨೦ \quad (೬)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ಕ = - \frac{೫೨೧}{೧೦} \quad \frac{೧}{೧೦} - ೪೨ = - \frac{೫೨೧}{೧೦}, \text{ ಅಂ. } ೨ಯು + ೪೨ = - ೨ \dots (೭)$$

$$(೬) \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, } ೨ಯು + ೧೫೨ = - ೨$$

$$(೭) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೨ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, } ೨ಯು - ೪೨ = ೪೦$$

$$\text{ವಜಾಪಾಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, } ೨೪೨ = ೪೬$$

$$\text{ಅಂ. } ೨ = - ೨.$$

$$(೭) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ } ೨ = - ೨ \text{ ಎಂದು ಇಡಲಾಗಿ,}$$

$$೨ಯು - ೧೦ = - ೨, \text{ ಅಂ. } ೨ಯು = ೮. \text{ ಅಂ. } ೨ಯು = ೮.$$

$$೨ಯು = ೮; ೨ = - ೨.$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(೧) \frac{೫}{೨-೩} + \frac{೩}{೨+೩} = \frac{೫}{೩}; \frac{೬}{೨-೩} - \frac{೨}{೨+೩} = ೦.$$

$$(೨) \frac{೮}{೨-೩} + \frac{೩}{೨+೩} = \frac{೧೩}{೧೦}; \frac{೯}{೨-೩} - \frac{೨}{೨+೩} = \frac{೧೭}{೨೦}.$$

$$(೩) \frac{೭}{೫+೬} - \frac{೩}{೫-೬} + \frac{೧}{೨೦} = ೦;$$

$$\frac{೨}{ಪ+ಬ} - \frac{೮}{ಪ-ಬ} + ೩\frac{೪}{೫} = ೦.$$

$$(೪) \frac{೨}{೫(ಯ+ರ)} - \frac{೩}{೨(ಯ-ರ)} + ೧\frac{೧೧}{೨೦} = ೦;$$

$$\frac{೨}{೨(ಯ+ರ)} + \frac{೩}{೫(ಯ-ರ)} = \frac{೩೭}{೪೫}.$$

$$(೫) \frac{೧}{೨(ರ-ವ)} + \frac{೨}{೯(ರ+ವ)} + \frac{೧೧}{೯೦} = ೦;$$

$$\frac{೩}{೯(ರ-ವ)} - \frac{೨}{೫(ರ+ವ)} = \frac{೧೯}{೪೦}.$$

$$(೬) \frac{೮}{(೨ಯ-ವ)} + \frac{೯}{೨(ಯ+ವ)} = ೨\frac{೧}{೧೨}; \quad \frac{೫(ಯ+ವ)}{೨(ಯ-ವ)} = ೭\frac{೧}{೨}.$$

$$(೭) \frac{೩}{೪(ರ+ಸ)} - \frac{೨}{೫(ರ-ಸ)} + \frac{೩}{೨೦} = ೦:$$

$$\frac{೪ರ-೪ಸ}{೭ರ+೭ಸ} = \frac{೮}{೪೨}.$$

$$(೮) \frac{೧}{೧-ಪ+ಮ} + \frac{೧}{೧-ಪ-ಮ} = ೧;$$

$$\frac{೨}{ಪ-ಮ-೧} + \frac{೩}{ಪ+ಮ-೧} = ೧.$$

$$(೯) \frac{೫}{೪ಯ-೩ವ} + \frac{೭}{೨ಯ+೨ವ} = ೧\frac{೧}{೨};$$

$$\frac{೪ಯ-೩ವ}{೨ಯ+೨ವ} = ೧\frac{೩}{೭}.$$

$$(೧೦) \frac{೮}{೨ಕ-೫ನ} + \frac{೩}{೪ಕ-೫ನ} = ೨\frac{೧೩}{೧೫};$$

$$\frac{೨ಕ-೫ನ}{೪ಕ-೫ನ} = ೧\frac{೩}{೫}.$$

$$(೧೧) \frac{೨೫}{೮+೬} + \frac{೮}{೭೮+೩೬} = \frac{೬೩೩}{೨೦};$$

$$\frac{೫}{೭೮+೩೬} - \frac{೩}{೮+೬} + \frac{೧}{೨} = ೦.$$

$$(೧೨) \frac{೪}{೨೮+೩೨-೫} + \frac{೩}{೩೮-೩+೨} + \frac{೧}{೬} = ೦;$$

$$\frac{೫}{೨೮+೩೨-೫} - \frac{೨}{೩೮-೩+೨} + \frac{೧}{೬} = ೦.$$

೪.

೬.೫. ಉ. ೧. ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ನಾಲ್ಕಡಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಎಕಂ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ೨ರಿಂದ ಕಡಿದು ಮಾಡಿ ಬರುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮುಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ೫ ಮತ್ತು ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯದು ೫ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦೫+೫. ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕಡಿಸಿ ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಕಡಿದು ಮಾಡಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೦೫+೫=೨, ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲಿಸಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦ ೫+೫. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ೪೦೫+೫=೨ (೧೦೫+೫)

$$\therefore ೪೦೫+೫=೨(೧೦೫+೫).$$

$$\therefore ೧೦೫-೨೫=೨$$

$$೨ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ೫೫-೫=೧ \dots \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೧೦೫ + ೫ = ೨(೧೦೫+೫) + ೫$$

$$\therefore ೧೦೫+೫ = ೨೦೫+೫೫+೫$$

$$\therefore - ೨೯ಪ + ೭ಮ = ೫ \dots (೨)$$

(೧) ನೆಯವನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೨೯ಪ - ೭ಮ = ೭$

ಪೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, $೭ಪ = ೧೨, ೨೦. ಪ = ೨.$

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ=೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ, $೧೦ - ಮ = ೧, ೨೦. ಮ = ೯.$

$\therefore ೨೯$ ಇದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು.

ಉ.೨. ೩೦ ಸೇರು ಮತ್ತು ೨೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಇರುವ ಎರಡು ಪಾತ್ರೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ೧೦ ಸೇರಿನಂತೆ ನೀರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನಂತರ ಆ ಪಾತ್ರೆಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಎಷ್ಟು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ತಿರುಗಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೧೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೪ ಸೇರು ನೀರು ಇರುವದು ?

ಮೊದಲನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೪೦ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ೩೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೧೦ ಸೇರು ನೀರು ಇರುವದು, ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೩ ಕ್ಕಿ ಹಾಲು ಮತ್ತು ೧ ಕ್ಕಿ ನೀರು ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೩೦ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ೨೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಇದ್ದು ೧೦ ಸೇರು ನೀರು ಇರುವದು. ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೩ ಕ್ಕಿ ಹಾಲು ಇದ್ದು ೧ ಕ್ಕಿ ನೀರು ಇರುವದು.

ಮೊದಲನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿಯ ಪ ಸೇರು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ದ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪ ಸೇರಿನಲ್ಲಿ ೩ ಕ್ಕಿ ಪ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೧ ಕ್ಕಿ ಪ ಸೇರು ನೀರು, ಮತ್ತು ದ ಸೇರಿನಲ್ಲಿ ೩ ಕ್ಕಿ ದ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೧ ಕ್ಕಿ ದ ಸೇರು ನೀರು, ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ

$$೩ಪ + ೩ದ = ೧೦ \dots \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೧ಪ + ೧ದ = ೪ \dots \dots \dots (೨)$$

(೨) ನೆಯವನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೩ಪ + ೩ದ = ೮ \dots (೩)$

(೧) ನೆಯವೊಳಗಿಂದ (೩) ನೆಯವನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ,

$$೧ಪ = ೨, ೨೦. ಪ = ೨.$$

(೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ = ೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ,

$$೨ + ೧ದ = ೪, ೨೦. ೧ದ = ೨, ೨೦. ದ = ೨.$$

೨ ಸೇರು; ೨ ಸೇರು.

12) ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೭೭

ಉ ೩. ಒಂದು ಡೋಣಿಗೆ ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೨೮ ಮೈಲು-
ಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೨೪ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಲು
ಆರು ತಾಸುಗಳು, ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೩೫ ಮೈಲುಗಳನ್ನು
ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ೩೩ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಬರಲು ೮ ತಾಸುಗಳು
ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ; ಆದರೆ ಡೋಣಿಯ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ತಾಸಿನ
ವೇಗವೆಷ್ಟು ?

ತಾಸಿಗೆ ಡೋಣಿಯ ಸ್ವಂತ ವೇಗವು x ಮೈಲುಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ
ವೇಗವು y ಮೈಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಡೋಣಿಯು ತಾಸಿನಲ್ಲಿ
 $x+y$ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ $x-y$ ಮೈಲು
ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವದು.

$$\therefore \frac{28}{x+y} + \frac{24}{x-y} = 6 \dots (1)$$

$$\text{ಮತ್ತು} \quad \frac{35}{x+y} + \frac{33}{x-y} = 8 \dots (2)$$

$$\text{೨ ನೆಯದನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,} \quad \frac{140}{x+y} + \frac{132}{x-y} = 32$$

$$\text{ಮತ್ತು (1) ನೆಯದನ್ನು} \quad \frac{100}{x+y} + \frac{120}{x-y} = 20$$

$$\text{೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ} \quad \frac{500}{x+y} + \frac{600}{x-y} = 100$$

$$\text{ಎಣಿಸಿದಾಗ} \quad \frac{100}{x-y} = 2 \dots (3)$$

(೧)ನೆಯಲ್ಲಿ $x-y = 50$ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ,

$$\frac{28}{x+y} + \frac{24}{50} = 6, \quad \text{ಅಂದರೆ} \quad \frac{28}{x+y} = \frac{28}{25}$$

$$\text{ಅಂದರೆ} \quad x+y = 25 \dots \dots \dots (4)$$

(೨) ಮತ್ತು (೪) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, $2x = 75$,

$$\text{ಅಂದರೆ} \quad x = 37.5 \text{ ಮತ್ತು } x+y = 25 \text{ ಇದ್ದುದರಿಂದ } y = -12.5$$

ಡೋಣಿಯ ವೇಗವು ೩೭.೫ ಮೈಲು; ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವು ೧೨.೫ ಮೈಲು.

ಉ.೪. ೩೬ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಊರಿಗೆ ಹೊರಟ ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ೨೭ ಮೈಲಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಬಸ್ಸಿನಿಂದ ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ಕಾಲಿನಿಂದ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ನಾಲ್ಕಾವರಿ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಬಸ್ಸಿನ ವೇಗವು ಅವರ ಮೊದಲಿನ ವೇಗದ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅವನು ತಾನು ಕಾಲಿನಿಂದ ನಡೆದ ಅಂತರವನ್ನು ಕಾಲಿನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟು ವೇಗದಿಂದ ನಡೆದಿದ್ದರೆ ಆ ತಾ. ೨ ಮೈ. ಗಳಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದನು, ಆದರೆ ಬಸ್ಸಿನ ಮತ್ತು ಅವನು ನಡೆಯುವ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು ?

ಬಸ್ಸಿನ ತಾಸಿನ ವೇಗವು ಬ ಮೈಲು ಮತ್ತು ಕಾಲಿನಿಂದ ನಡೆಯುವವನು ಸ ಮೈಲು ಇದ್ದರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವಂತೆ

$$\frac{36}{b} + \frac{r}{s} = \frac{27}{3}, \quad r \text{ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, } \frac{3}{b} + \frac{1}{s} = 3 \dots (1)$$

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{\frac{36}{b}}{2} + \frac{\frac{r}{s}}{2} = \frac{27}{2}$$

$$\therefore \frac{36 \times 2}{2b} + \frac{r \times 2}{2s} = \frac{27}{2}$$

$$27 \text{ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, } \frac{2}{b} + \frac{1}{s} = \frac{3}{2}$$

$$27 \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{27}{b} + \frac{27}{s} = 27 \dots (2)$$

$$(1) \text{ ನೆಯದನ್ನು } 2 \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ } \frac{6}{b} + \frac{2}{s} = 6 \dots (3)$$

(2) ನೆಯದೊಳಗಿಂದ (3) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆವೆ

$$\frac{r}{b} = 3, \text{ ಅಂ. } b = 12.$$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಬ = ೧೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ,

$$ಗಿ + \frac{೧}{೨} = ೩, \text{ ಆಂ. } \frac{೧}{೨} = ೩ - ೨ = ೧, \text{ ಆಂ. } ೨ = ೨.$$

ಬಸ್ಸಿನ ವೇಗವು ೧೨ ಮೈಲು; ನಡೆಯುವ ವೇಗವು ೨ ಮೈಲು.

ಉ. ೫. ಒಂದು ಧಾರ್ಮಿಕ ಸಮಾರಂಭದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನೆರೆದ ವೈದಿಕರಿಗೆ ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ದಕ್ಷಿಣೆ ಎಂದು ಸರಿಯಾಗಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು. ಅವರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೬೦ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫ ರೂ. ಕಡಿದು, ಮತ್ತು ೪೦ ಕಡಿದು ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ದೊರೆಯುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ವೈದಿಕರು ಎಷ್ಟಿದ್ದರು? ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಕ್ಷಿಣೆಯು ಸಿಕ್ಕಿತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ವೈದಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವ ಇದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫ ರೂ. ದಕ್ಷಿಣೆಯು ಸಿಕ್ಕಿದ್ದರೆ ವದ ರೂ. ದಕ್ಷಿಣೆಯನ್ನು ಹಂಚಲಾಯಿತೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ,

$$(ವ + ೬೦)(೫) = ದನ \dots \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } (ವ - ೪೦)(೫) = ದನ \dots \dots \dots (೨)$$

$$\text{ಒಂದನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ ದನ} + ೬೦ \times ೫ - ೪೦ \times ೫ = ದನ.$$

$$\therefore ೬೦ \times ೫ = ೧೦೦ \dots \dots \dots (೩)$$

$$\text{ಮತ್ತು } (೨) \text{ ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ } ದನ - ೪ \times ೫ = ೨೦ = ದನ$$

$$\therefore - ೪ \times ೫ = ೨೦ \dots \dots \dots (೪)$$

$$(೩) \text{ ಮತ್ತು } (೪) \text{ ಕೂಡಿಸಿದರೆ } ೨೦ = ೧೦೦, \text{ ಆಂ, } ದ = ೨೫.$$

$$\text{೪ನೆಯದರಲ್ಲಿ } ದ = ೨೫ \text{ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ,}$$

$$- ೧೦೦ + ೫ = ೨೦, \text{ ಆಂ. } ೫ = ೧೨೦, \text{ ಆಂ. } ೨ = ೨೪೦.$$

$$\text{ವೈದಿಕರು, ೨೪೦; ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ದಕ್ಷಿಣೆಯು ೫ ರೂ.}$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೫

೧. ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂಕಗಳ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೭ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ

ಸಂಖ್ಯೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

ಜೇರ್ವೀಜು ಆ ವೃತ್ತಮಂಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಅರು ಪಟ್ಟಿ ಇರುತ್ತದೆ, ಅದರಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨. ಬಾಳಪ್ಪನಾಯಕರು ತಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣದಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವಷ್ಟು ಓಡ್ಡಿ ದರದ ಸರಕಾರಿ ಸಾಲಿನ ಠೇವಣಿಪತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ಓಡ್ಡಿ ದರದ ಮುನಿಸಿಪಾಲಟಿಯ ಸಾಲಿನ ಠೇವಣಿಪತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ ವೆಚ್ಚ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಅವರಿಗೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೆ ೨೦೦೦ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಬೇ ಅವರು ತಮ್ಮ ಹಣವನ್ನು ಎರಡೂ ಠೇವಣಿಪತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದ್ದರೆ, ಅವರ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿಯ ಉತ್ಪನ್ನವು ೯೦ ರೂ. ಗಳಿರುವ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅದರಿ ಅವರ ಏಳಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತು, ಮತ್ತು ಅವರು ಅದನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟಿಟ್ಟಿದ್ದರು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ೩ ರೂ. ಗೆ ಒಂದರಂತೆ ೨೦೦ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಯ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದನೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕಾಣೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎರಡನೇ ಗುಂಪಿನೋಗಿನದವುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದನು, ಮತ್ತು ಆ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೦ ರಂತೆ ಲಾಭವಾಯಿತು. ಅವನು ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನೋಳಿಗಿನ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದನೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೪ ಅ. ಕಡಿನೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದ್ದನೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ೪ ಅ. ಹೆಚ್ಚು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾರಿದ್ದರೆ, ಅವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಆದ ಲಾಭಕ್ಕಿಂತ ೧೦ ರೂ. ಕಡಿನೆ ಲಾಭವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅದರಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಸಿಗಳಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ರಾಮರಾಯರು ಒಂದು ಕುದುರೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಗಾಡಿಯನ್ನು ಕೆಲವು ಹಣಕ್ಕೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡರು. ಕುದುರೆಗೆ ೧೦೦ ರೂ. ೧೦ ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಗಾಡಿಗೆ ೧೦೦ ರಂತೆ ಕಡಿನೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ೧೦೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಹಣವು ಖರ್ಚು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಆದರೆ ಕುದುರೆಯು ನೂ. ೧೦ ರಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಜಿಲಿಗೆ ಮತ್ತು ಗಾಡಿಯು ನೂ. ೧೫ ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚು ಜಿಲಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದರೆ, ಒಬ್ಬ ಹಣದಲ್ಲಿ ಯಾವವೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತಿದ್ದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಕುದುರೆ ಮತ್ತು ಗಾಡಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಜಿಲೆ ಎಷ್ಟು ?

೫. ಒಂದು ಡೋಣಿಗೆ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೨೦ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ಹಿಂಸೆ ಬರಲು ೮ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅದಕ್ಕೆ ೨೪ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ಅಂತ್ಯೇ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಬರಲು ೬ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿವೆ. ಆದರೆ ಡೋಣಿ, ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು ?

೬. ಭೀಮಪ್ಪ ಬಡಗನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ೫೬ ರೂ. ಗಳಿಸುತ್ತಾನೋ ಅಷ್ಟೇ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ರಾಮಪ್ಪ ಗೆನುಡಿಯು ೪೦ ರೂ. ಗಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ೬೫ ರೂ. ಗಳಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಭೀಮಪ್ಪನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಅವುಗಳಿಗಿಂತ ಎರಡು ಹೆಚ್ಚು ದಿನಗಳು ರಾಮಪ್ಪನಿಗೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವರ ದಿನಗೂಲಿಯ ದರವೆಷ್ಟು ?

೭. ಮೂರು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದ್ದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೯೯ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು ತಿರುವುಮುರುವಾಗುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೪ ಇರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಯಾವದು ?

೮. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಪೇಟೆಗೆ ಹೋದನು. ಅಲ್ಲಿ ದರವು ಸೇರಿಗೆ ಒಂದು ಅಣೆಯಂತೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಇಳಿದ ಮೂಲಕ ಅವನಿಗೆ ೮ ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕಿತು. ದರವು ಒಂದು ಅಣೆಯಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೬ ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ಕಡಿಮೆ ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಹಣದ ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯು ಸಿಕ್ಕಿತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೯. ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಸಭಾಗೃಹದ ಉದ್ದಳತೆಯು ೫ ಫೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದು ಅಗಲಳತೆಯು ೨ಫೂಟು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದಿದ್ದರೆ ಅದರ ಪ್ರೇಕ್ಷಕನು

೩೬೦ ಚೌ. ಫು. ಗಳಿಂದ, ಮತ್ತು ಉದ್ದಳತೆಯು ೫ ಫೂಟು ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದು ಅಗಲಳತೆಯು ೫ ಫೂಟು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೭೫ ಚೌ. ಫೂ. ಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅದರ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ ?

೧೦. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ೧೦ನೇ ಇಯತ್ರೆಡುಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಹುಡುಗರನ್ನು ಎರಡನೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ ಮೊದಲನೆಯವರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದರ ಕ್ಷಿ ರಷ್ಟು ಹುಡುಗರಾಗುವವು, ಆದರೆ ಎರಡನೆಯವರಲ್ಲಿಯ ೨ ಹುಡುಗರನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿಯೂ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವವು, ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹುಡುಗರಿರುವರು ?

೧೧. ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಜೋರೀಜನ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿ ಅಗುಮ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಜೋರೀಜನ ಐದು ಪಟ್ಟು ಅಗುವದಂದು ಸಿದ್ಧವಾಡಿರಿ.

೧೨. ಮಾವಿನಹಣ್ಣಿನ ದರವು ಡಬ್ಬುನ್ನಿಗೆ ೮೮. ಇಳಿದ ಮೂಲಕ ಹೋವವಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಣ್ಣು ಸಿಕ್ಕಿದ ಹಣ್ಣುಗಳು ಅವರ ಹಿಂದಿನವಾರದಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕಾ ಹಣ್ಣುಗಳಿಗಿಂತ ೩ ಡಬ್ಬುನ್ ಹಣ್ಣುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕವು, ಮತ್ತು ಈ ವಾರದಲ್ಲಿ ದರವು ಮತ್ತೂ ೮೮. ಇಳಿದದ್ದರಿಂದ ಅಷ್ಟೇ ಹಣದಲ್ಲಿ ಹೋವವಾರದಿಗಿಂತ ಒಂದು ಡಬ್ಬುನ್ ಹಣ್ಣುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕವು ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ವಾರದಲ್ಲಿ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಹಣದ ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೩. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣು ಮಾರುವವನ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮೋಸಂಬೀ ಹಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗಿಂತ ೮ ಹೆಚ್ಚು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳಿದ್ದವು. ಅವನು ಮೋಸಂಬೀ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳಿಗಿಂತ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೩ ಪಣಿ ಹೆಚ್ಚು ದರದಿಂದ ಮಾರುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದ ನಂತರ ಎರಡೂ ತರದ ಹಣ್ಣುಗಳ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಗಳು ಒಂದೇ ಇದ್ದವು. ಅವನಿಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅವನು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮೋಸಂಬೀ ಹಣ್ಣುಗಳ ದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಮೋಸಂಬೀಗಳನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ದರದಿಂದ

ಮಾರಿದ್ದರೆ ಕತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ಜೆಲೆಯು ಮೋಸಂಬಗಳ ಜೆಲೆಗಿಂತ ೩ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರಹದ ಹಣ್ಣುಗಳು ಎಷ್ಟಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಯಾವ ದರದಿಂದ ಮಾರಿದನು?

೧೪. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅಣ್ಣಿಪ್ಪನ ವಯಸ್ಸು ವಸಂತನ ಆ ಸಮಯದ ವಯಸ್ಸಿನ ಮುಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೫ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದು, ಐದು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಅವನ ಆ ಸಮಯದ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೫ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವದು. ಇದರೇ ಇಂದಿನ ಅವರ ವಯಸ್ಸು, - ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೫. ಗಂಡವೆಂದೆಯರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೇರೆಯು ಇಂದು ಅವರ ಮಕ್ಕಳ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೇರೆಯಾದ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇದ್ದು ನೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ಮಕ್ಕಳ ಆ ಕಾಲದ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೇರೆಯಾದ ನಾಲ್ಕುಡಿಯಿತ್ತು, ಮತ್ತು ೩ ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಮಕ್ಕಳ ಆ ಕಾಲದ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೇರೆಯಾದ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೨ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಗೆ ಮಕ್ಕಳೆಷ್ಟು?

೧೬. ರಾಮ, ವಿಠಲ, ಗೋವಿಂದ ಈ ಮೂವರೂ ಒಂದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಳ್ಳಿಗೆ ಹೊರಡುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ರಾಮನ ನಡಿಗೆಯ ವರಾಸವಿ ವೇಗದಿಗಿಂತ ವಿಠಲನ ವೇಗವು ತಾನಿಗೆ ಅರ್ಧ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನದು ಅರ್ಧ ಮೈಲು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದುದರಿಂದ ವಿಠಲನು ರಾಮನ ನಂತರ ೪೫ ಮಿ. ತಡಮಾಡಿ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನು ರಾಮನಿಗಿಂತ ೩೫ ಮಿ. ಮೊದಲು ಮುಟ್ಟುತ್ತಾನೆ; ಆದರೆ ಆ ಊರು ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಅವರ ನಡಿಗೆಯ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೭. ಒಬ್ಬ ಗಡಿಯಾರ ಮಾರುವವನು ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಸೂ. ೨೫ ಲಾಭದಂತೆ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಸೂ. ೧೫ ಲಾಭದಂತೆ, ಮೀಗೆ ಎರಡು ಗಡಿಯಾರಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ೪೭೬ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ಮೊದಲನೆಯ ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಸೂ. ೧೫ ಲಾಭದಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೧೦ ಹಾನಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾರಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ಆ ವ್ಯಮಾರದಲ್ಲ

ಅಭವೂ ಅಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ, ಇಲ್ಲವೆ ಹಾನಿಯಾದರೂ ಅಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಆ ಗಡಿಯಾರಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೂಲ ಜಲೆ ಎಷ್ಟು ?

೧೮. ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನೇ ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಜೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೨ ಕೂಡಿಸಿ ಬಂದ ಜೇರಿಜನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ೩ ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಳ ಜೇರಿಜನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೬ ಬರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೧೯. ಒಬ್ಬ ಬಣ್ಣಗಾರನು ಒಂದು ಬಣ್ಣದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಅದು ಕೆಲ-
ವಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಯುವದೆಂದು ಅಂದಾಜಿನಿಂದ, ಕೆಲವು ರಕಸಿಗೆ
ಮಾಡಲು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡನು, ಆದರೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ೫ ದಿನಗಳು ಹೆಚ್ಚು
ಹತ್ತಿದ್ದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ಅಸೇಕ್ಷಿಸಿದಗಿಂತ ವಿನಕ್ಕೆ ೧ ರೂ. ಕಡಮೆ ಸಿಕ್ಕಿತು.
ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಅಸೇಕ್ಷಿಸಿದಗಿಂತ ೪ ದಿನಗಳು ಕಡಮೆ ಹತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ದಿನಕ್ಕೆ
೧೧ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ಎಷ್ಟು ವಿನ-
ಗಳು ಬೇಕಾದವು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಸಿಕ್ಕಿತು ?

೨೦. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದಿಂದ ೨೮ಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ
ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರದೊಳಗಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೇರಿಜನಿಂದ ೮೦ಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ
ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೩ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು
ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೇರಿಜನಿಂದ ೧೨೦ಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರದೊಳಗಿಂದ
ಅಂತರದಿಂದ ೨೪ಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು
೩ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೨೧. ಒಂದು ವಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಲು ಮತ್ತು ನೀರು ೪ : ೧ ಈ
ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೨೫ ಸ್ಕು,
ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಹಾಲು
೨೨ ಸೇರು ಮತ್ತು ನೀರು ೭ ಸೇರು ಅಗುವದು ?

೨೨. ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅವುಗಳ ಜೇರಿಜನಿಂದ
ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರವು ೪ ಬಂದು ಶೇಷವು ೩ ಉಳಿಯುವದು. ಮತ್ತು
ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೩೬ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳ ಅದರ-
ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೦. ಕೆಲವಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಷದೊಳಗಿನ ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು. ಎರಡನೆಯ ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳು ಕೂಡ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೪ ಅಣೆಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ೩ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ೨ ಅಣೆಗಳು ಕಡಿಮೆ ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಹಂಚಲಾಯಿತು, ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದರು ?

೨೧. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಭೇದವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಭೇದದೊಳಗಿಂದ ಅಂಶವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ೧ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅಂಶ ಹಾಗೂ ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ೨ ಕಳೆದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಆಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು ?

೨೨. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ದರದ ೨೦ ರತ್ನಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ರತ್ನಲಿಗೆ ೩ ರೂ. ದರದ ಕೆಲವನ್ನು ಚಹವನ್ನೂ ಮತ್ತು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ದರದ ಕೆಲವನ್ನು ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ೩ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೨ ರೂ. ೬ ಅ.ಗೆ ರತ್ನಲಿನಂತೆ ಮಾರಿ ೧೦ ರೂ. ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆದನು. ೨ ರೂ. ದರದ ಚಹವನ್ನು ೨ ರೂ. ದರದ ಚಹವನ್ನು ಮತ್ತು ೩ ರೂ. ದರದ ಚಹದನ್ನು ೨ ರೂ. ದರದ ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಲಾಭವು ಒಂದು ರೂ. ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಪ್ರಕಾರದ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಚಹವಿತ್ತು ?

೨೩. ಎರಡು ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೊಂದರ ನಾಲ್ಕುಡಿಯಿದ್ದು ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಪ್ಪುಡಿಯಿರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೪. ರಾಮರಾಯರು ತಮ್ಮಲ್ಲಿಯ ಹೂವಲ್ಲಿಯ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕೃಷ್ಣ ರಾಯರಿಗೆ ಕೊಟ್ಟರೆ ಕೃಷ್ಣ ರಾಯರು ಏಳೆಯಲ್ಲಿ ೧೨೫ ರೂ. ಗಳು ಆಗುವವು,

ಕೊಟ್ಟರೆ ರಾಮರಾಯರು ಹತ್ತರ ೧೨೫ ರೂ. ಆಗುವವು. ೬ ರೂ. ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತು ?

೨೫. ಎರಡು ಲೂರುಗಳ ಸಮನಿಸ ಅಂತರವು ೧೦ ಸೈಲು ಇವು. ಅವರಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ದಾರಿಯು ಸಪಾಟಾಗಿ, ಕೆಲವನ್ನು ಪರಿಕೆಯದು ಮತ್ತು

ಕೆಲವಷ್ಟು ಇಳುಕಲಿದಿರುತ್ತದೆ. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಹೋಗುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಆ ಅಂತರವನ್ನು ೪ ತಾಸು ೪೦ ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ತಿರುಗಿ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೫ ಮಿ. ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅವನ ಏರಿಕೆಯ ಮೇಲಿನ, ಸವಾಟ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಇಳುಕಲಿನಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಸರಾಸರಿ ತಾಸಿನ ವೇಗವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨ಮೈ; ೩ಮೈ; ಮತ್ತು ೪ ಮೈಲು. ಇದ್ದರೆ, ವಾರಿಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವು ಸವಾಟವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೨೯. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ತನ್ನ ಮನೆಯಿಂದ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲಿನಂತೆ ನಡೆದು ನೆಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಊರಿಗೆ ಕೆಲಸಕ್ಕಾಗಿ ಹೋದನು. ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ತಾಸಿದ್ದು ತಿರುಗಿ ಮನೆಗೆ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನೊಡಲು ಕೆಲವಷ್ಟು ಅಂತರವನ್ನು ಸಾಯಕಲ್ ಮೇಲಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೧೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮತ್ತು ಬೀಜವನ್ನು ನೊಡಲಿನಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಬಂದನು. ಮನೆಗೆ ಬಂದ ಮೇಲೆ ಅವನಿಗೆ ೯ ಹೊಡೆದು ೨೪ ಮಿ. ಗಳಾದದ್ದು ಕಂಡುಬಂತು, ಅವನ ನಡೆಯುವ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೩ ಮೈಲು ಮತ್ತು ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ವೇಗವು ೮ ಮೈಲು ಇದ್ದರೆ ಅವನು ೧೦ ಹೊಡೆದು ೪೦ ಮಿ. ಗಳಲ್ಲಿ ಮನೆಗೆ ತಿರುಗಿ ಬರುತ್ತಿದ್ದನು. ಆದರೆ ಅವನ ಮನೆಯಿಂದ ಆ ಊರಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

೩೦. ಬಲಗಡೆಯ ಅಂಕೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕ-ಗುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿಯ ಅಂಕ ಮತ್ತು ನಡುವಿನ ಅಂಕ ಇವುಗಳ ಅಡಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೮೦ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಎಡಬದಿಯ ಅಂಕಿಯ ಅರ್ಧವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಡುವಿನ ಅಂಕ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯ ಅಂಕ ಇವುಗಳ ಅಡಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೫೪ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

೩೧. ವಿಧಿ ಮಂಡಲವ ಜುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮತದಾರ ಸಂಘದ ಒಂದು ಜಾಗೆಗಾಗಿ ಇಬ್ಬರು ಉಮೇದವಾರರು ನಿಂತಿದ್ದರು. ಆರಿಸಿ ಒಂದ ಉಮೇದವಾರನಿಗೆ ದೊರೆತ ಮತಗಳಲ್ಲಿ ೨೪೦೦ ಮತಗಳು ಎರಡನೇ ಉಮೇದವಾರನಿಗೆ ಬಿದ್ದಿದ್ದರೆ ಎರಡನೇ ಉಮೇದವಾರನು ೧೯೨ ಮತಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಪಡೆದು ಆರಿಸಿ ಬರುತ್ತಿದ್ದನು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಮತದಾನದಲ್ಲಿಯೂ ೧೬

ಮತಗಳು ಆಗ ದೊರೆತ ಮತಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ದೊರೆತಿಲ್ಲದೆ, ಇಬ್ಬರಿಗೂ ಸಮಾನ ಮತಗಳು ದೊರೆತಿಲ್ಲವು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಮತಗಳು ದೊರೆತವು ?

೨೨. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡೂ ೨ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾದಿದ್ದರೆ ಅವರ ಪರಿಮಾ ೩ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ೧ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿದರೆ ೨ ಆಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು ?

೨೩. ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂಕಗಳ ಜೋಡಣೆ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೬ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವರೊಳಗಿಂದ ೨ ಕಳೆದರೆ ಅವರ ಅಂಕಗಳೆ ಅವರು ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೪. ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೩ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅವರು ಬದಲಿಸಿ ಅವಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ೨ ಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳಂತೆಯೇ ಮೂರು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ವರ್ಣಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ದಿಗ್ವಿ ಅಸ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಅವರ ಶಿಕ್ಷಣ ಬಾತೆಯು ಹಾಕಿಕೊಟ್ಟ ಇಲ್ಲವೆ ಎಸ್. ಎಸ್. ಸಿ. ಪರೀಕ್ಷೆ ಮಂಡಲವು ಸೇರಿಸಿದ ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮಾಪರಣವನ್ನು ಮಾಡಿಲ್ಲ. ಆದಕಾರೂ ಅವುಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಇಲ್ಲ ಮಾಡಿಲ್ಲ.

ಏಳನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಅಲೇಖ

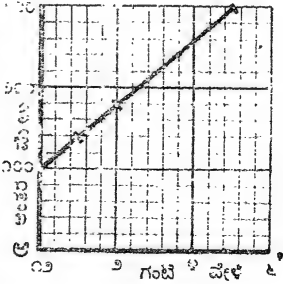
೦.

೩.೧. ಹಿಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಇಯತ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿರಲು ಅಲೇಖದ (Graph) ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಜ್ಞಾನವು ನಮಗೆ ಆಗಿರುವದು. ಅರನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾಗ, ಜನಸಂಖ್ಯೆ, ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಉಪಸ್ಥಿತಿ, ಗುಣ, ಮೂಲೋದ್ದೋಗ, ಬೆಳೆಗಳು, ಜನ್ಮ ಮುಂತಾದವುಗಳಿಗೆ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಓದುವದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು, ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ ವಸ್ತುಗಳ ವಾರದಲ್ಲಿಯ ಇಲ್ಲವೆ ತಿಂಗಳಿನ ವರಗಳು, ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಅಲೇಖ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಮಂಡಿಸುವದಿಂಬುವದು ನಾವು ಕಲಿತಿದ್ದೆವು. ಮುಂದೆ ಏಳನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಹೆಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ, ಹೆಡುಗರ ಎತ್ತರಕೆತ್ತ ಮತ್ತು ತೂಕ, ಮೂಲೋದ್ದೋಗಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರಗತಿಯು, ಸರಕುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮುಂತಾದವುಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಓದುವದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದಿಂಬುವದು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೆವು. ಎಂಟನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕಾದರೆ ಇಂಚು ಮತ್ತು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ, ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು ಪೌಂಡುಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ಡಾಲರುಗಳು. ಇವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೂಪಾಂತರಾಲೇಖ ವಿಷಯದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡೆವು. ಹೊದವರನು ಒಂಬತ್ತನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಸದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ಓದುವದಿಂಬುವದು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೆವು. ಅವಕ್ಕನುಸರಿಸಿಯೇ ಈಗ ನಾವು ಮುಂದಿನ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸೋಣ, ಮತ್ತು ಅಲೇಖದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಗಳಿಸೋಣ.

೩.೨. ನಮ್ಮ ಊರ ಹತ್ತರ ಒಂದು ಉಗಿಬಂಡಿಯ ದಾರಿಯು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದು ದಿನಾಲು ಕೆಳಗಿನ ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ಬರುವ ಒಂದು ಉಗಿಬಂಡಿಯು ಮಧ್ಯಾಹ್ನದ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಊರಗೆ ಬಂದು

ಮೇಲ್ಕಂಡಿರುವ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಮಧ್ಯಾಸ್ಥದಲ್ಲಿ ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ಆ ಗಾಡಿಯು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಊರಿನಲ್ಲಿ ದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಡುವ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ಇದ್ದರೆ, ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಯ ನಂತರ ಯಾವಾಗಾದರೂ, ಅದು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಬಹುದು ಕಲ್ಪಿಸಿ. ಇದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸುವಂತೆ ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ಅವಧಿಯನ್ನು ಅಡ್ಡ ಗೆರೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದೆ. ಮತ್ತು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೈಲಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಉದ್ದ ಗೆರೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದೆ. ಸರಿಯಾಗಿ ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಗೆ ಆ ಗಾಡಿಯು ೧೦೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ, ಒಂದು ಗಂಟೆಗೆ ೧೪೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ೨ ಗಂಟೆಗೆ ೧೮೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ಮತ್ತು ೩ ಗಂಟೆಗೆ ೨೨೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟು ನಾವು ಈ ಅಲೇಖವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಗಾಡಿಯು ಎಲ್ಲಿರುವದು ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವವಾದರೊಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅದು ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಗೆ ಇರುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಮಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಈಗ ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಯ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ಯಾವವಾದರೊಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅದು ಎಲ್ಲಿರುವದು, ನಮ್ಮ ಊರಿನ ಮೇಲಿಂದ ಅದು ಯಾವಾಗ ಹೋಗುವದು ಮೊದಲಾದ ಸಂಗತಿಗಳು ಮೇಲಿನ ಅಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದು? ಇಲ್ಲಿ ಅವ

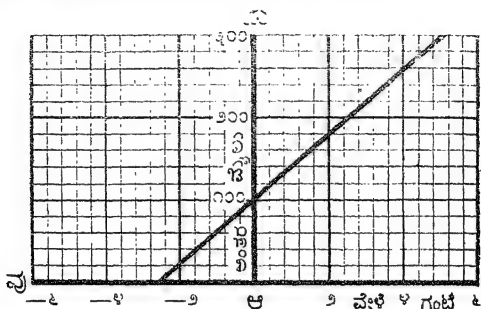


ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧.

ಈ ರೇಖೆಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ಅವರೆ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಪೂರ್ವದ ವೇಳೆಯನ್ನು

ವೇಳೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ತೋರಿಸುವದಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ

ಎನು ಮಾಡುವದು? ಧನ-ಫಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಹೇಗೆ ಬುಲಯೋಗವಲ್ಪಡುತ್ತವೆಯಾದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂಬೆ (ಭಾ. ೧. ಪ್ರ. ೬.) ಎಂಟನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿವತ್ತಾಗ್ಗೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆ ಇದು ಅರಂಭ-ಸ್ಥಾನವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಅವ ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾವು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಿದರೆ (ವೂ ದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ) ಅದು ಬಲಬದಿಗೆ ಹೇಗೆ ನಾವು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಕರುನಾಯದ

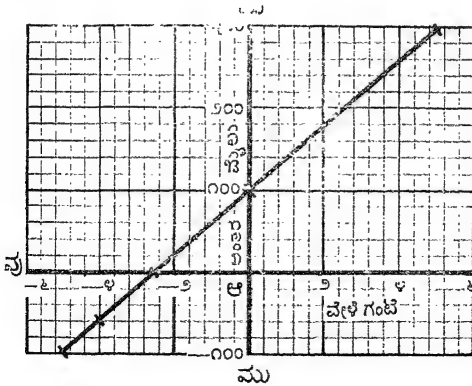


ಕ್ರ. ೨.

ವೇಳೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೋ ಅದರಂತೆಯೇ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಪೂರ್ವ-ದಲ್ಲಿಯೇ ವೇಳೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯದ ಸಂಕೇತಿಸಂತೆ, ಎಡಬದಿಗೆ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಗಾಡಿಯು ೧ ತಾಸು ಮೊದಲು (೧೧ ಗಂಟೆಗೆ) ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ೬೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡು ತಾಸುಗಳ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ (೧೦ ಗಂಟೆಗೆ) ೨೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವದು, ಮೊದಲಾದ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಅರ್ಥವು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಸ್ವರೂಪವು ಇರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಅರ್ಥವದ ಮೇಲಿಂದ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಗಿಂತ ೨೧ ತಾಸು ಮೊದಲು ಅಂ. ೯೧ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಬಂದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಸಮಯದಿಂದ ಅದು ಯಾವಾಗ ಎಲ್ಲಿರುವದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಗಾಡಿಯು ಇದಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೊತ್ತು ಮೊದಲೇ ಕೆಳಗಡೆಯಿಂದ ಹೊರಟಿದೆ. ಅದು ೯೧ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿತ್ತು. ಅದರ

ಈ ಮಾರ್ಗಕ್ರಮಣವು ಸಹ ನಮಗೆ ಅಲೇಖದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವದಿಷ್ಟರಿ ಏನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು? ಅನು ಈ ರೀತಿಯು ನಮ್ಮ ಅಲೇಖ ಪತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮುಂದಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹಿಂದಿನ (ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯ) ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುವದಿಷ್ಟರಿ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅರೇಖೆಯನ್ನು ಬರುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ (ಮುಂದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ) ಬೆಳೆಸಬೇಕಾಗುವದು, ಮತ್ತು ಅಂತರವು ಅದರ ಮೇಲ್ಮಡುಗಿರುವ ಅಂತರಗಳು ಹೇಗೆ ಭಸವಿರುವವು; ಅದರಂತೆ ಕೆಳಗೆಡುಗಿರುವ ಅಂತರಗಳು ಉಣವಿರುವವು. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೮ ಗಂಟೆಗೆ (೪ ತಾಕು ಮೊವಲು) ಗಾಡಿಯು ಕೆಳಗಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೬೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ೯ ಗಂಟೆಗೆ (೫ ತಾಕು ಮೊವಲು) ೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ನುಯ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಅಲೇಖವ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗವನ್ನೂ ಸಹ ನಮಗೆ ಮುಂದೆ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೩.

ಗಾಡಿಯ ಮೂಲ ಹೊರಡುವ ಸ್ಥಳವು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಕೆಳಗಡೆ ೧೦೦ ಮೈಲು ಇದ್ದು ಅದು ಅಲ್ಲಿಂದ ಪ್ರತಿದಿನ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಡು

ಸಾಯಂಕಾಲ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಮಡಿಗೆ ೧೦೦ ಮೈಲುಗಳಿದ್ದ ಮುಕ್ತಾಮದ ಊರಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತದೆಯೆ ತಿಳಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಆ ಅಲೆವು ಗಾಡಿಯು ಮೂಲ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಹೊರಟಾಗಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಮದ ಊರಿಗೆ ಮುಟ್ಟುವ ತನಕ ಅದರ ಪ್ರವಾಸದ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ಇಲ್ಲಿಗೆ ತರುಣಾಯವಾಗಲಿ ಯಾವಾಗ ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಅಲೇಖದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ವುಅವ ಮತ್ತು ಮುಅಮ ಈ ರೇಖೆಗಳು ಅಲೇಖವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಅಲೇಖವು ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ಅದು ಎರಡನೇ ಭಾಗ-ದೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಮೊದಲನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತದೆಯೆ ಕಂಡು ಬರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ಇಲ್ಲಿಗೆ ತರುಣಾಯ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಯಾವಾಗ್ಗೆ ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳುವ ಸೂತ್ರವನ್ನಾದರೂ ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುಣಾಯದಕಾಲ (ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ) ವ ಈ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮತ್ತು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಮದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವನ್ನು (ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿ) ಮು ಈ ಸ್ಥಳದಿಂದ ತೋರಿಸಿದರೆ, ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಮದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೧೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದರ ಸೂಸರಿ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ಇರುವದರಿಂದ ಮು: ೧೦೦ + ೪೦ ವ ಈ ಸೂತ್ರವು ಗಾಡಿಯು ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಗಾಡಿಯು ಬಂದಾಗ ಮ = ೦, ಅದುದರಿಂದ ೧೦೦ + ೪೦ ವ = ೦, ಅಂ. ೪೦ ವ = -೧೦೦ ಅಂ. ವ = -೨೫ ಅಂ. ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ೨೫ ತಾಸು ಮೊದಲು ಅಂ. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೯೫ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಬರುತ್ತದೆ.

ಗಾಡಿಯು ಮೂಲ ಹೊರಡುವ ಸ್ಥಳವು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ-೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ, ಅದುದರಿಂದ ಗಾಡಿಯು ಹೊರಡುವ ಸಮಯದಲಿ

ಮ = ೧೦೦, ಆದುದರಿಂದ—೧೦೦ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ, ಅಂ. ೪೦ವ = —೨೦೦, ಅಂ. ವ = —೫.

∴ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ನೋಡಲು ೫ ತಾಸು, ಅಂ. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಡುತ್ತದೆ.

ಅದರಂತೆಯೇ ಗಾಡಿಯ ಕೊನೆಯ ಮುಕ್ತಾಯದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮುಟ್ಟುವಾಗ ಮ = ೨೦೦, ∴ ೨೦೦ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ, ಅಂ. ೪೦ವ = ೨೦೦, ಅಂ. ವ = ೫
∴ ಗಾಡಿಯು ಸಾಯಂಕಾಲ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ಮುಕ್ತಾಯದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ.

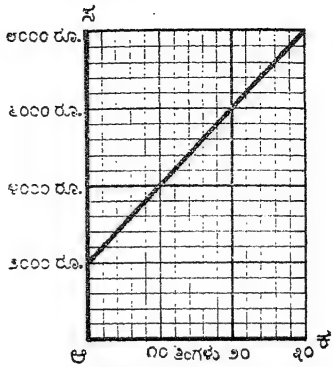
ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುವ ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಸಮೂಹಿಸಿರುವುದು ಅಂತರ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಎಣಿಸಿ ನಂಬುವ ಆಲೇಖವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ ಈ ಸೂತ್ರವೂ ಸಹ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ವ ಇದು ಆ ಆಲೇಖದ ಸಮೀಕರಣವಿರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಆಲೇಖವು ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವಿರುತ್ತದೆ.

೭.೩. ಈಗ ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿ.

೩೦ ತಿಂಗಳ ನೊಡಲು ತಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮುಗಿಸಿ ಸ್ವತಃ ಗಣಕಲೆಗೆ ಹತ್ತಿದನಂತರ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ತನ್ನ ಆದಾಯದೊಳಗಿಂದ ೨೦೦ ರೂ. ಗಳನ್ನು ಶಿಲಕು ಇಡುವದೆಂದು ವಸಂತ ರಾಯರು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದರು. ಮತ್ತು ಅದರಂತೆ ಅವರು ನಿಯಮಿತ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡುತ್ತ ಬಂದಿರುವರು. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಆ ಉಳಿತಾಯವನ್ನು ತಾನು ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸಲು ವೆಚ್ಚ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಇಂದು ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ೨೦೦ ರೂ ಉಳಿತಾಯವಿದ್ದರೆ ಅವರ ಉಳಿತಾಯದ ಹಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

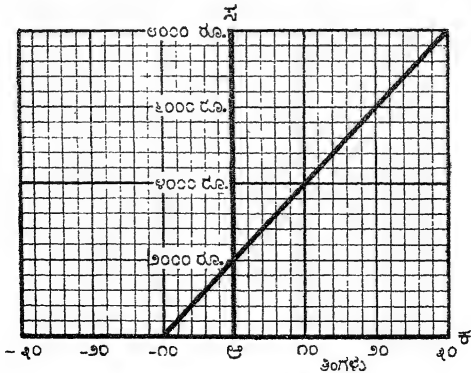
ಮುಂದಿನ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ಆಕೆ ಈ ಅಡ್ಡ ಗೆರೆಯು ಈ ಮುಂದಿನ ಕಾಲವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆಕೆ ಈ ಉದ್ದರೇಖೆಯು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆಲೇಖವು ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದೆ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು

ಶಿಲುಕರುತ್ತದೆಯುಡನ್ನು
ಶೋರಿಸುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಈ
ನೋದಲೇ ಯಾನಾಗ
ಎಷ್ಟು ಶಿಲಕತ್ತೆಯುಡನ್ನು
ಆಡು ಹೇಳುವದಿಲ್ಲ.
ಅವಕ್ಕಾಗಿ ಆಕ ಈ
ರೇಷೆಯನ್ನು ವಿರುದ್ಧ
ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಬೇಕಾ-
ಗುವದು, ತರುವಾಯ
ಆಲೇಖವು ಮುಂದೆ
ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರು-
ವದು.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೪.

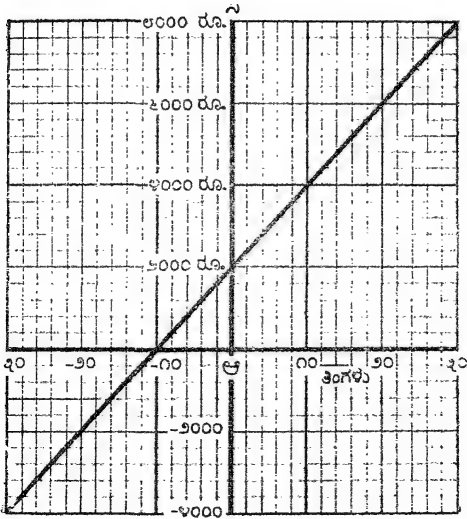
ಈ ಆಲೇಖವೆ ಮೇಲಿಂದ (ಕ್ರ. ೫) ಸ್ಪಷ್ಟ. ಕಂಡುಬರುವವೇನಂದರೆ
ವಸಂತರಾಯರು ಪ್ರಾರಂಭದಿಂದ ನಿಯಮಿತವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ 200 ರೂ.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೫

ತೆಗೆದಿಟ್ಟರೂ ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸುವದಿದ್ದುದರಿಂದ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಕಳೆದ ೧೦ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಹಣವು ಕೂಡಹತ್ತಿತು. ಆ ಮೊದಲಿನ ತಲುಕು ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ವೆಚ್ಚ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಸಾಲವು ೨೦೦ ರೂ.ಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಲಿದೆ. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಆಲೇಖವು ತೋರಿಸಲಾರದೇ? ಅಥವಾ ಈ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದು ಆ ಲೇಖವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಆ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ (ಕ್ರ.೬) ನಮಗೇನು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ?

ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ೨೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂಪಿ, ಅವರಿಗೆ ೪೦೦೦ ರೂ. ಸಾಲವಿತ್ತು. (ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ—೪೦೦೦ ರೂ.). ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಅದು



೨೦೦ ರೂ.ಗಳಂತೆ ಇಳಿಯುತ್ತ ಹೋಗಿ ೧೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ನಿಃಶೇಷವಾಯಿತು, ಅಂದರೆ ಅವರು ಋಣಮುಕ್ತರಾದರು. (ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ, ೦ ರೂ.). ಇದು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ, + ೨೦೦೦ ರೂ. ಇನ್ನೂ ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ನಂತರ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ = $(೨೦೦೦ + ೩೦ \times ೨೦೦)$ ರೂ. = ೮೦೦೦ ರೂ. ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ, ಮತ್ತು ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದೆ ಆಗಿರುವ ಅವಧಿಯು ಇವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವದಿದ್ದರೆ, ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದೆ ಆಗುವ ಅವಧಿ (ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ) ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸ ಮತ್ತು ಕ ಈ ವರ್ಗಗಳಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಇಂದು ೨೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಅವರು ೨೦೦ ರೂ. ತಿಲುಕು ಇಡುವದರಿಂದ, ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಎಂದು ಆ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದು.

ಕ = ೦ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦. ಅಂದರೆ ಇಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವು ೨೦೦೦ ರೂ.

ಕ = ೩೦ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦ + ೬೦೦೦ = ೮೦೦೦, ಅಂದರೆ ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ತರುವಾಯ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವು ೮೦೦೦ ರೂ. ಕ = ೬೦ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦ + ೬೦೦೦ = ೮೦೦೦, ಅಂದರೆ ಸರಿಯಾಗಿ ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂದೆ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವು ೮೦೦೦ ರೂ. ಅಂದರೆಯೇ ಸಾಲು. ೪೦೦೦ ರೂ.

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವವು. ಕ್ರ. ೬ನೇ ಆ ಲೇಖನ ಯಾವ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆವೋ ಅವೇ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣವಾದರೂ ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಇದು ಆ ಆಲೇಖದ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದು ಅದು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವೆಂದು ಇದರ ಅರ್ಥವಾಗುವದಿಲ್ಲವೇ?

೨.

೭.೪. ಹಿಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಇಯತ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದವೋ, ಓದಿದವೋ ಮತ್ತು ನೋಡಿದವೋ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಋಣ

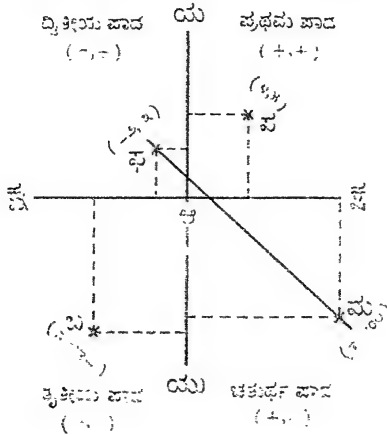
ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಬಂಧವು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಇದ್ದಿಲ್ಲ. ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಇರುವ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಯಾವ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೊನೆಗೆ ತೆಗೆದಿದ್ದೇವೆ (ಕ್ರ. ೩ ಮತ್ತು ಕ್ರ. ೬) ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಬಂಧವಾದರೂ ಬಂದಿರುವುದು, ಮತ್ತು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಭೇದಿಸಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆರಂಭ ಸ್ಥಾನದ ಎಡಬದಿಗೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಬದಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ ಅಲೇಖ ಪತ್ರದ ನಾಲ್ಕುಭಾಗಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಾದ (Quadrant) ವೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದ್ದು ಮುಂದಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ (ಕ್ರ. ೭) ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ್ರಥಮಸಾದ, ದ್ವಿತೀಯಸಾದ, ತೃತೀಯಸಾದ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಥಸಾದಗಳೆಂದು ಸಂಬೋಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಅಕ್ರಮಿಸುವ ಮೊದಲು ಅಲೇಖ ವಿಸ್ತಾರದ ಸ್ವಲ್ಪ ಪರಿಭಾಷೆಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿವ್ವಾಗ ನಾವು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಅನುಕೂಲ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ, ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಉದ್ದ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ಅಕ್ಷಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದ್ದು, ಅಡ್ಡ (ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ Horizontal) ಗೆರೆಗೆ ಭುಜಾಕ್ಷವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಉದ್ದ (ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ Vertical)ಗೆರೆಗೆ ಕೋಟ್ಯಕ್ಷವೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಅಕ್ಷಗಳ ಭೇದದಬಿಂದುವಿಗೆ ಆರಂಭಸ್ಥಾನೆ ಇಲ್ಲವೆ ಪ್ರಸ್ಥಾನವೆಂದು ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮುಂದಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಇದು ಆರಂಭಸ್ಥಾನವಿದ್ದು ಪುನಃ ಮತ್ತು ಯುಅಯ ಇವು ಅಕ್ಷಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯದು ಭುಜಾಕ್ಷವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು ಕೋಟ್ಯಕ್ಷವಿರುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ಹೆಸರುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಯು-ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಸಹ ನಾವು ಅನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಳವು ಪ್ರಧಾನಯೋಜ್ಯೋತ್ತರ ವೃತ್ತದಿಂದ ಪೂರೈಕೆ ಇಲ್ಲವೆ ಸತ್ತಿಮಕ್ಕೆ ಇಂತಿಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದು ವಿಮನವೃತ್ತದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲವೆ ದಕ್ಷಿಣಕ್ಕೆ ಇಂತಿಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಿದಾಗ್ಗೆ, ಅಂದರೆಯೇ ಆದರ ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದೋ, ಹಾಗೆಯೇ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವು ಕೋಟೈಕ್ಷದಿಂದ ಬಲಗಡೆಗೆ ಇಲ್ಲವೆ ಎಡಗಡೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಮತ್ತು ಭುಜಾಕ್ಷದಿಂದ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕೆಳಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದೆಂಬುದು ತಿಳಿದರೆ ಅಲೇಖಪತ್ರದಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದು. ಹಾಗೆಯೇ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಳವು ಎಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೇಗೆ ನಾವು ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇವೋ, ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವು ಅಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅಕ್ಷಗಳಿಂದಿರುವ ಅದರ ಅಂತರಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ನಮ್ಮ ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಕೇತಿನಿಂದ ನಾವು ಬಲಗಡೆಯ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಧನ (+) ಮತ್ತು ಎಡಗಡೆಯವುಗಳನ್ನು ಋಣ (-); ಮತ್ತು ಮೇಲಿನವುಗಳನ್ನು ಧನ (+), ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಋಣ (-) ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟೈಕ್ಷದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಅದರ ಭುಜಾಂತರ ಇಲ್ಲವೆ ಅದರ ಭುಜವೆಂದೂ, ಮತ್ತು ಭುಜಾಕ್ಷದಿಂದಿರುವ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಅದರ ಕೋಟೈಂತರ ಇಲ್ಲವೆ ಅದರ ಕೋಟಿ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಭುಜಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವಂತೆ ಅಳೆಯಲ್ಪಡುವದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯದಕ್ಕೆ ಭುಜಾಂತರ ಇಲ್ಲವೆ ಭುಜ ಮತ್ತು ಎಡದನೆಯದಕ್ಕೆ ಕೋಟೈಂತರ ಇಲ್ಲವೆ ಕೋಟಿ ಎಂಬ ಸಂಜ್ಞೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಧನ ಮತ್ತು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಷಯದ ಸಂಕೇತಗಳಿಗೆ ಅನುಸರಿಸಿ, ಬಲಗಡೆಯ ಭುಜಾಂತರಗಳು ಧನ (+) ಮತ್ತು ಎಡಗಡೆಯವು ಋಣ (-); ಹಾಗೂ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಕೋಟೈಂತರಗಳು ಧನ (+) ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನವು ಋಣ (-). ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಕ್ಷಗಂವಿರುವ ಅಂತರಗಳಿಗೆ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುವಾಗ ಭುವಾಂತರವನ್ನು ಮೊದಲು ಮತ್ತು ಕೋಟ್ಯಂತರವನ್ನು ತರುವಾಯ ಉಲ್ಲೇಖಿಸುತ್ತಾರೆ. ಭೂಜ (ಅಡ್ಡ ರುವ ಅಂತರ), ಕೋಟಿ (ಉದ್ದ ರುವ ಅಂತರ). ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಈ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕಂಪನದಲ್ಲಿ ನಮನೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಮರಾದ ಚಿನ್ನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೨.

ಬರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಈ ಅಂತರಗಳು ೪ ಮತ್ತು ೫ ಮಾನಗಳು (Units) ಇದ್ದರೆ, ಅಕ್ಷಗಳ ಶುಲ್ಕ (ರೂಪನ್ನು ನಾಣ್ಯ (೪, ೫) ಎಂದು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಫ (೨, ೩) ಇದರ ಅರ್ಥವು ಫ ಈ ಬಿಂದು ವಿನ ಭೂಜ = ೨ ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೋಟಿಯು ೩ ಮಾನಗಳಿರುತ್ತವೆಯೆಂದು ಇರುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ೦, ೧ ಈ ಮಾನವನ್ನು (Unit) ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಯಾವುದರ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕೋಟಿರುತ್ತವೆಯೋ ಅಂಥ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಬಿಂದುಸ್ಥಾಪನೆ ಇಲ್ಲವೆ

ಸ್ಥಾಪನ ಮಾಡುವದು (Plotting the point) ಎಂಬುದನ್ನು ತ್ವರಿತವಾಗಿ (ಮಾನ್ Unit ಈ ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಏಕಾಂಕ ಎಂಬ ಶಬ್ದವನ್ನಾಧರಿಸಿ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.)

ಮೇಲಿನ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ಯಾವುದರ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ (೪, ೫), (—೨, ೩), (—೬, —೪), (೧೦, —೭), ಇರುವವೋ ಇಂಥ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿವು ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ, ಫ, ಬ ಮತ್ತು ಮ ಈ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟೆವೆ. ಫ, ಮ, ಇದು (೨, ೩), (೧೦, —೭) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯ ಕಡೆಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯಗೊಟ್ಟು ನೋಡಿದರೆ ಕಂಡುಬರುವುದೇನೆಂದರೆ ನೋಡಲೇ ಸಾದದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಧನ (+, +) ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಭುಜ, ಋಣ ಮತ್ತು ಕೋಟಿ ಧನ (—, +) ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಋಣ (—, —), ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯದರಲ್ಲಿ ಭುಜ ಧನ ಮತ್ತು ಕೋಟಿ ಋಣ (+, —) ಇರುವವು.

ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ನೀವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಬಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಮತ್ತು ಚೌಕೋನಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧—೬ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಚೌಕೋನಗಳು ಎಳೆದಿರುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಚೌಕೋನಗಳ ಕಾಗದವೇ ಬೇಕು, ಇಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಬರಲಾರದದು, ಅಥವಾ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರಲಾರದದ್ದಲ್ಲ. ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಚೌಕೋನಗಳಿಲ್ಲದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆಯೂ ಸಹ ಈ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು. ಅದರ ಅನುಕೂಲತೆಯ ಶ್ರಷ್ಟೆ ಇರುವದು. ಚೌಕೋನಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಕೆಲಸವು ಸುಲಭವಾಗುವದಲ್ಲದೆ ಅದನ್ನು ಬೇಗ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಅದುದರಿಂದ ನಾವು ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯು ಹೀಗಿರುವದು. ಮೊದಲು ಆರಂಭ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಭುಜಾಂತರವನ್ನು ಭುಜಾಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಅಳೆಯಬೇಕು. ತರುವಾಯ ಆ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಕೋಟ್ಯಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೋಟ್ಯಂತರವನ್ನು

ಅಳೆಯಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿ ಯಾವ ಬಿಂದುವು ಸಮಗ್ರ ಮೊರೆಯುವದೋ ಅದೇ ನಮಗೆ ಸಿಗಬೇಕಾಗಿರುವ ಬಿಂದು.

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

[ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಾನವ (Unit) ಯಾವುದು ತಿಳಿದು-
ಕೊಂಡಿರುವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ವ.ಕೆ.ಯ.ಬಿ.ಬಿ.ಬಿ.]

೧. ಅಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ (೨, ೬); (೩, ೮); (-೫, ೩); (-೬, -೪); (೩, -೬); (-೪, -೮); (೫, -೮); (-೬, ೫) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

೨. (-೧, -೪), (೨, -೫), (೧, -೧), (೨, ೩), (೩, ೨) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. (-೮, ೪), (-೬, ೪), (೨, ೪), (೪, ೪) (೬, ೪) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವೇನು ?

೪. (-೫, ೫), (೫, ೨), (-೫, ೦), (-೫, ೪), (-೫, ೬), ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವು ಯಾವುದು ?

೫. (೨, -೫), (೨, -೧೦), (೬, -೧೫), (-೨, ೫), (-೪, ೧೦), (-೬, ೧೫) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವು ಯಾವುದು ?

೬. (೨, ೮), (-೮, -೫), (೧೦, -೪) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೭. (-೪, ೬), (-೬, ೬), (೨, -೮), (೨, ೬) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಚತುರ್ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩.

೭.೫. ಈಗ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ಹಿಂದೆ ಹೊರಳುವಾ. ಪ. ೭.೨ರಲ್ಲಿಯ ಗಾಡಿಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಸಮ್ಯಕ್ ಉಪನಿರ್ದಿಷ್ಟಿತವಾದ ಗಾಡಿಯ ಅಂತರ

(ಮ) ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಾನ್ಹದ ತರುವಾಯದ ಮೇಳಿಯು (ನ) ಇವು ಒಂದರ-
ಮೇಲೊಂದು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳಿದ್ದು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ-
ವನ್ನು $ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು
ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $ಮ$ ದ ಜಿಲೆಯಿಂದರೆ $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ರಾಶಿಯು
ಜಿಲೆಯು ಮತ್ತು ಅದು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ $ನ$ ದ ಜಿಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರು-
ತ್ತದೆ. $ನ$ ದ ಜಿಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗಾಗೆ
 $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ರಾಶಿಯ ಜಿಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂದರೆಯೇ $ಮ$ ದ ಜಿಲೆಯಲ್ಲಾ ದರೂ
ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಸಂಗತಿಯು
ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು.

ಮ =	-೫	-೪	-೩	-೨	-೧	೦	೧
ಮು $೧೦೦ + ೪೦ನ =$	-೧೦೦	-೬೦	-೨೦	೨೦	೬೦	೧೦೦	೧೪೦
ನ =	೨	೩	೪	೫			
ನು $= ೧೦೦ + ೩೦ನ =$	೧೨೦	೨೨೦	೩೨೦	೪೦೦			

ಇಲ್ಲಿ $ನ$ ದ ಜಿಲೆಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ನ
ಈ ರಾಶಿಯಾದರೂ ಅಂದರೆ $ಮ$ ದ ಜಿಲೆಯೂ ಸಹ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರಿ-
ನ $ನ$ ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜಿಲೆಗೆ $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ನ ೨೦ , $ಮ$ ದ ನಿಶ್ಚಿತವಿರುವ
ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಜಿಲೆಯಿದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ $ನ$ ದ ಜಿಲೆಯ
ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಇರುವುದರಿಂದ $ನ$ ದ ಜಿಲೆಯು
ಎರಡನೇ ಚರ (Variable) ಸಂಗತಿಯ ಜಿಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತ-
ದೆಯೋ ಆ ರಾಶಿಯು ಎರಡನೆಯವರ ಫಲ (Function) ಪಡುತ್ತದೆಂದೆ-
ನ್ನು ತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ನ ಈ ರಾಶಿಯು $ನ$ ದ ಫಲವಿರುವದು. ಈಗ
 $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ನ ಅಂದರೆಯೇ $ಮ$, ಅದುವರಿಂದ $ಮ$ ಇದು $ನ$ ದ ಫಲವಿರು-
ವದು. ಗಾಡಿಯು ಹೋಗುವ ಅಂತರವು ಮೇಳಿಯ ಫಲವಿರುವದು.

ಕ್ರ. ೩ನೆಯ ಅಲೇಖವು $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲ ದೆ)
ಅಲೇಖ ಇಲ್ಲವೆ $ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅಲೇಖವಿರುವದು.
ಆ ಅಲೇಖದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ (—೫, —೧೦೦),
.... — ನೋ. ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಅದರ ಮೇಲಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಪ್ರತಿವಕ್ಷ್ಯ ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿಯು ಅಸಲು ಎಷ್ಟಿರುವದೆಯ ಸಂಗತಿಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದರಿಂದ ಬಡ್ಡಿ ಇದು ಅಸಲಿನ ಫಲವಿರುವದು. ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟುಗೂಡುವ ತಿಂಗಳಿನ ಫೀ ಇದು ಹೆಚ್ಚುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದರಿಂದ ತಿಂಗಳ ಒಟ್ಟು ಫೀ ಹಣವು ಹೆಚ್ಚುಗರ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಫಲವಿರುವದು. ಅದರಂತೆಯೇ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಗಳ ಫಲವಿರುವದು, ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ತಳ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಇವುಗಳ ಫಲವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಿಟ್ಟು ಒಂದು ಘನಫಲವು ಉದ್ದಳತೆ, ಅಗಲಳತೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ಇವುಗಳ ಫಲವಿರುವದು. ಸ್ಪರ್ಶದರಲ್ಲಿ ಹೇಳುವ ದೆಂದರೆ ಒಂದು ಸಂಗತಿಯು ಎರಡನೆಯದರ ಫಲವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಂಗತಿಯು ಬೇರೆಯು ಎರಡನೆಯದರ ಬೇರೆಯು ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದು ಈ ಎರಡರ ಮುಕ್ತಾರ್ಥವು ಒಂದೇ.

ಪ್ರ. ೭. ೧. ನೆಯವರಲ್ಲಿಯ ವಸೂಲಾದಾಯಕ ಹೂ ತಾಯವ ಹಣವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೆ. ಅಲ್ಲಿ ಇರುವದಿರುವ ಮುಂದಿನ ಕಾಲ (ಕ) ಮತ್ತು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ (ಸ) ರವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ $s = 2000 + 200k$ ಎಂದು ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣವು (ಸ) ಎಷ್ಟೆಂಬುದು ಕ ದ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಿರುವದೋ ಅದರ ಮೇಲೆ ಪೂರೈವಾಗಿ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಕ ಹೇಗೆ, ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ ಹಾಗೆ ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದ ಅಂಕಿಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಕ =	೨೦	೨೫	೩೦	೩೫	೪೦	೪೫	೫೦	೫೫	೬೦	೬೫
ಸ =	೨೦೦೦	೨೫೦೦	೩೦೦೦	೩೫೦೦	೪೦೦೦	೪೫೦೦	೫೦೦೦	೫೫೦೦	೬೦೦೦	೬೫೦೦
ಕ =	೨೦	೨೫	೩೦							
ಸ =	೨೦೦೦	೨೫೦೦	೩೦೦೦							

ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಕ ಚರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಅವರ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ $2000 + 200k$ ಕ ದ ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಅದರಂತೆಯೇ ಸ ದ ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಕ ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೆ ನಿಶ್ಚಿತವಾದ ಪೂರೈವಾಗಿ ಕ ದ

ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆಯೇ ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಈ ರಾಶಿಯು ಮತ್ತು ಅದುದರಿಂದಲೇ ಸ ಇವು ಕ ದ ಫಲ ವಿರುವದು.

ಕ್ರ. ೬ ನೇ ಅಲೆಖವು ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಈ ರಾಶಿಯ ಇಲ್ಲವೆ (ಫಲದ) ಅಲೆಖವು ಇಲ್ಲವೆ ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅಲೆಖವಿರುತ್ತದೆ, ಆ ಅಲೆಖವ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ (—೩೦, —೪೦೦),.....ಮೊದಲಾದ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಅದರ ಮೇಲಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಯಾವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಸ್ಥಿರವಿಲ್ಲವೇ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವವೋ ಅಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಚರಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ಕೇವಲ ಚರಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ — ಯಿರುತ್ತದೆ. ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ; ಮತ್ತು ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮ, ವ, ಸ, ಕ ಇವು ಚರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಯಾವ ಚರಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಬೇರೆ ಚರಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ತೆಗೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆಯೋ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸ್ವತಂತ್ರ ಇಲ್ಲವೆ ಪರಾಧೀನ ಚರಗಳೆಂದೂ, ಮತ್ತು ಯಾವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮೊದಲನೇ ಚರಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ತೆಗೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆಯೋ ಅವುಗಳಿಗೆ ಪರತಂತ್ರ ಇಲ್ಲವೆ ಪರಾಧೀನ ಚರಗಳೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀ- ಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ವ ಮತ್ತು ಕ ಇವು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರಗಳಿದ್ದು ಮ ಮತ್ತು ಸ ಇವು ಪರತಂತ್ರ ಚರಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪರತಂತ್ರ ಚರವು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರದ ಫಲವಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಮರೆಯಕೂಡದು.

೪ಕ್ಷ, ೩ಕ್ಷ—೭, ೨ಕ್ಷ+೫, ೨ಕ್ಷ+೨ಕ್ಷ+೨ಕ್ಷ+ಕ್ಷ—೩,

$$\frac{4}{ಕ್ಷ} - \frac{3}{ಕ್ಷ} + \frac{5}{ಕ್ಷ} \dots \dots$$

ಈ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳು ಕ್ಷ ಈ ಚರದ ಫಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಕ್ಷ ವ ಕೊಟ್ಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ನಿಶ್ಚಿತವಿರುವಂಥ ಬೆಲೆಯು ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಕ್ಷ ವ ಬೆಲೆಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಬದಲಾಗುತ್ತ- ಹೋಗುತ್ತದೆ. ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯ ನಿರ್ವೇಶನವನ್ನು ಯ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ ಇವೇ ಫಲಗಳು ಯ = ೪ಕ್ಷ, ಯ = ೩ಕ್ಷ—೭, ಯ = ೨ಕ್ಷ+೫, ಯ = ೨ಕ್ಷ+೨ಕ್ಷ+೨ಕ್ಷ+ಕ್ಷ—೩

$$+ \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} + \dots$$

ಹೀಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರುವವು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ ಸ್ವರೂಪಕ್ಕೆ ಇದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರವಿದ್ದು ಯ ಇದು ಪರತಂತ್ರ ಚರವಿರುವದು.

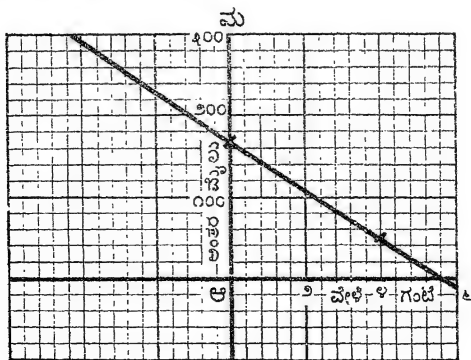
೭.೬. ಈಗ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಏಕಘಾತ ಏಕವರ್ಣ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲದ) ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ, ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವನ್ನು ಹೀಗೆ ತೆಗೆಯುವುದುಬಹುದು ನೋಡುವಾ. ಮಧ್ಯಾನ್ಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗಾಡಿಯು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಗಡೆಗೆ ೧೭೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದು ಅದು ನಮ್ಮ ಊರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೇ ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೩೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಬರುತ್ತಲಿದೆ, ಆದರೆ ಅದು ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಯಾವ ವೇಳೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ. ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಂತರವು ಇರುವದೋ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶನವನ್ನು ಮೆ ದಿಂದ ಮತ್ತು ೧೭ ಗಂಟೆಯ ನಂತರದ ವೇಳೆಯ ನಿರ್ದೇಶನವನ್ನು (ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ) ಮೆ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ೧೭ ಗಂಟೆಗೆ ಗಾಡಿಯು ೧೭೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದು ತಾಸಿಗೆ ೩೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ನಮ್ಮ ಊರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬರುವದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊರಿಂದಿರುವ ಅಂತರ ಮತ್ತು ೧೭ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ವೇಳೆ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ಮೆ=೧೭೦-೩೦ ವ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

೧೭೦-೩೦ವ ಈ ರಾಶಿಯ ಆಲೇಖ ಮತ್ತು ಮೆ ೧೭೦-೩೦ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ ಇವೆರಡೂ ಒಂದೇ. ಇಲ್ಲಿ ೧೭೦-೩೦ವ ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಇರುವದೋ ಅದನ್ನು ಮೆ ಈ ವರ್ಣದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ ೧೭೦-೩೦ವ ಈ ಏಕವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ರಾಶಿಯ ಬದಲಾಗಿ ಮೆ=೧೭೦-೩೦ವ ಈ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣದ ಸಮೀಕರಣವು ಬರುತ್ತದೆ. ಏಕಘಾತ ಏಕವರ್ಣ ರಾಶಿಯ ಇಲ್ಲವೆ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಿರುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ಬಾರಿ-

ಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಹಾಗೇ ಇರುತ್ತದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಸಹ ಬರುವದು. ನೀವು ಬೇಕಾದ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ವರ್ಣಗಳ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಆ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವವೆಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಈಗ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಿಯೂ ತಪ್ಪು. ಗುನವಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಮನಗಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂರನೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ v ದ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಇದ್ದಾಗ $u = 0$ ವ ದ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಇರುವದು ಅಂದರೆಯೇ v ಮತ್ತು v ಇವುಗಳ ಯಾವ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮೀಕರಣವು ಪೂರ್ಣವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$v = 0, 1, 2$ ಇದ್ದಾಗ

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $u = 0.20 - 0.0v = 0.20, 0.10, -0.10$ ಇರುವದು.



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ಅ.

ಆಲೇಖ ಪತ್ರದ ಮೇಲೆ (೦,೧೭೦). (೪,೫೦), ಮತ್ತು (೬,—೧೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. (ಮೂರೂ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು-ಕೊಳ್ಳತಕ್ಕದ್ದು.)

ಗಾಡಿಯು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಇದೇ ಆಲೇಖವು. ೧೭೦ ೩೦ನ ಈ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲದ) ಆಲೇಖವು. ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ ಮು. ೧೭೦ ೩೦ ನ ಈ ಸಮೀಕರಣದ್ದೂ ಇದೇ ಆಲೇಖವು. ನ ಮತ್ತು ಮ ಇವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳ ಯಾವುದೇ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಇದೇ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುವದು.

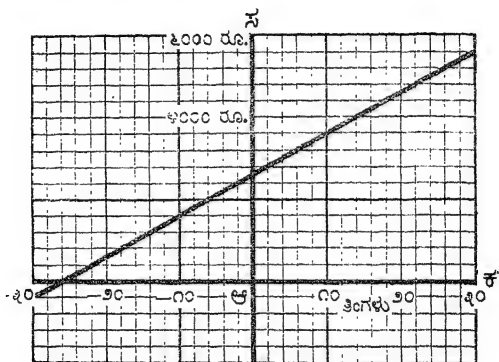
೭.೭. ಇನ್ನೊಂದು ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಸೇರಿ ಇಂದು ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳಾದವು. ಮೊದಲಿನಿಂದ ಅವರು ನಿಯಮಿತವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೦೦ ರೂ. ಯಂತೆ ಶಿಲುಕು ಇಡುತ್ತಾರೆ. ಮೊದಲಿನ ಕೆಲವು ಶಿಲುಕನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ವೆಚ್ಚ ಮಾಡಿದರು. ಮತ್ತು ಇಂದು ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ೨೬೦೦ ರೂ.ಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇಂದಿನಿಂದ ಯಾವಾಗಾದರೂ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಕೂಡಿದ್ದಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆ ಸೂತ್ರದ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದಿನ ಕಾಲವನ್ನು (ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ) ಕೆ ದಿಂದ ಮತ್ತು ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣವನ್ನು (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) ಸೆ ದಿಂದ ನಿರ್ವಹಿಸಿದರೆ, ಶಿಲುಕು ಮತ್ತು ಕಾಲ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು, ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಇಂದು ೨೬೦೦ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಅವರು ೧೦೦ ರೂ. ಶಿಲುಕು ಇಡುವದರಿಂದ, ಸ=೨೬೦೦+೧೦೦ ಕೆ ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಡಿಸಲು ಬರುವದು. ಈಗ ಸ=೨೬೦೦+೧೦೦ ಕೆ ಈ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲದ) ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ

ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಹುಡುಕುವಾ. $k = 0, -2, 10$ ಇವಕ್ಕೆ
 $s = 2500 + 100k$ $k=2500, 0, 2500$ ಇರುವದು.

ಈಗ ನಾವು ಆಲೇಖನತ್ರದ ಮೇಲೆ $(0, 2500)$ ಮತ್ತು $(-25, 0)$
 ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವಾ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು
 ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳ ಆಲೇಖದ ಮೇಲೆ
 $(10, 2500)$ ಈ ಬಿಂದುವು ಸಹ ಇರುವದರಿಂದ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದ-
 ರಲ್ಲಿ ಯಾವದೇ ತಪ್ಪು ಆಗಿಲ್ಲ.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೯.

$2500 + 100k$ ಈ ರಾಶಿಯು ಇಲ್ಲವೆ $s = 2500 + 100k$ ಈ
 ಸಮೀಕರಣದ್ದು ಇದೇ ಆ ಆಲೇಖವು.

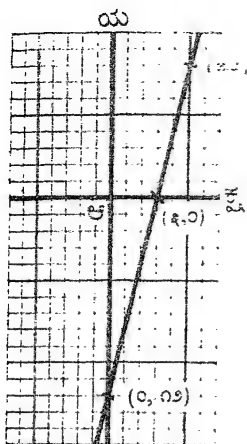
೭.೮. ೨೦. ೩. $k=10$ ಈ ರಾಶಿಯ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

$k = 0, 2, 10$ ಇದ್ದಾಗ

$k=10 = -10, 0, 10$ ಇರುವದು.

$(0, -10)$ ಮತ್ತು $(2, 0)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವಾ ಮತ್ತು
 ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ.

೫, ೮) ಈ ಬಿಂದುವಾದರೂ ಅದರ ಮೇಲಿರುವದು.



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೧

ಮಾಡುವುದು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಅವರ ಮೇಲೆ ಬಿತ್ತುವುದು.

೩x + ೨y = ೬ ಇದನ್ನು

ಯ = ೩ - ೩/೨ x ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವುದು.

(೦, ೩), (೩, ೦) ಮತ್ತು (-೩, ೬) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ

ನಂತರ ಮೊದಲನೆಯ ಬಿಂದು

ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಮೂರನೆಯ

ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು

ಮೂರನೆಯ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ

ದರೂ ಕಾಣುವುದು.

ಕಂಡುಬರುವುದು. ಅದುವೇ

೩x + ೨y = ೬ ಈ ಸಮೀಕರಣದ

ಕರಣವು ಇದೇ ಆ ಅಲೇಖವು.

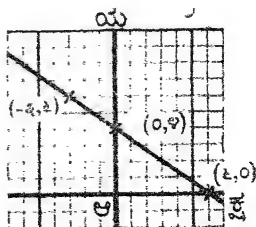
೩x + ೨y = ೬ ಈ ಸಮೀಕರಣದ
ಅಲೇಖವು. ೩x + ೨y = ೬
ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಯ ಏಕದ ಲೋಕದಲ್ಲಿ
ಯ = ೩ - ೩/೨ x ಈ ಸಮೀಕರಣದ
ಕರಣವನ್ನು ದರೂ ಇದೇ ಅಲೇಖವು.

ಉ.೪. - ೩x + ೨y = ೬
ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅಲೇಖಿಸಿ
ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು
ಸಮೀಕರಿಸುವುದು.

೩x + ೨y = ೬

೩x + ೨y = ೬

ಎಂದು ಬರೆದು ತರುವಾಯ ಅವರ
ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಯ ಗೆರೆ
ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗನ್ನು
ಕೆಳಗೆಯಲಾಗಿರುವುದು. ಅವರ ಹಾಗೆ



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೦.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೩೭.

೧. ಮುಂದಿನ ರಾಶಿಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ :

- (೧) $೨\bar{೫} + ೩$; (೨) $೪\bar{೫} - ೧$; (೩) $೫\bar{೫} + ೨$;
 (೪) $೯\bar{೫} - ೨$; (೫) $೧೨ - ೧\bar{೫}$; (೬) $೮ - ೪\bar{೫}$.

೭. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಿಸಿರಿ :

- (೧) $೪ = ೫ - ೩$; (೨) $೪ = ೩\bar{೫} + ೧$; (೩) $೪ = ೨\bar{೫} - ೫$;
 (೪) $೪ = ೨\bar{೫} + ೩$; (೫) $೨೪ = ೮ - ೩\bar{೫}$; (೬) $೪\bar{೫} + ೪ = ೫$;
 (೭) $\bar{೫} + \frac{೩}{೫}೪ = ೨$; (೮) $\frac{\bar{೫}}{೪} - ೪ = ೧$; (೯) $\frac{\bar{೫}}{೨} + \frac{೪}{೩} = ೫$;
 (೧೦) $\bar{೫} = ೪ - ೨೪$; (೧೧) $೫\bar{೫} - ೨೪ = ೩$;
 (೧೨) $೪\bar{೫} - ೨೪ + ೩ = ೦$.

೩. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಿಸಿರಿ :

- (೧) $೪ = ೫\bar{೫}$; (೨) $೪ = ೨\bar{೫}$; (೩) $೨೪ + ೩\bar{೫} = ೦$;
 (೪) $೪ = ೨೪$; (೫) $೮ - ೫\bar{೫} = ೦$;

ಈ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟಗುಣವೇನು ?

೪. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೂಹದೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಆಲೇಖವತ್ತಾದ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಯುವುದಿವಿ.

- (೧) $೪ = ೨\bar{೫} + ೫$; $೪ = ೨\bar{೫} - ೩$; $೪ = ೨\bar{೫} - ೧$; $೪ - ೨\bar{೫} = ೪$.
 (೨) $೪ = ೪\bar{೫} - ೩$; $೪ = ೪\bar{೫} + ೧$; $೪ = ೪\bar{೫} + ೨$;

$$೪ - ೪\bar{೫} + ೨ = ೦.$$

- (೩) $೩\bar{೫} + ೪\bar{೫} = ೯$; $೮ + ೫\bar{೫} = ೧$; $೫\bar{೫} + ೮ + ೮ = ೦$;

$$\frac{೮}{೪} + \frac{೮}{೩} = ೪.$$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೂಹದೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕೂ ಆಲೇಖಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಏನು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ?

೫. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯೆ ತಿರವಿಸಿದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಓದಿರಿ. ತರುವಾಯ ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಹಸ್ರಜೀವಿಗಳಿಗಾಗಿ ಕಂಪುಬಿತ್ತು ಕೊಡು. ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಹಿಸಿ ಯೆ. ೨೩-೨೬ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅರಿವಿಸಿರಿ.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad \text{ಇದನ್ನು } x, y, z \text{ ಗಳಿಂದ ಪರಿಹರಿಸಿರಿ.}$$

ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಹಸ್ರಜೀವಿಗಳನ್ನು ಕಂಪುಬಿತ್ತು ಕೊಡುವುದೇ?

೬. ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಮೊದಲು ಕಂಡಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಓದಿರಿ. ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಹಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ೨ ಸಮೀಕರಣ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ + $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅರಿವಿಸಿರಿ.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad \text{ಇದನ್ನು } x, y, z \text{ ಗಳಿಂದ ಪರಿಹರಿಸಿರಿ.}$$

ಇತ್ತೀಚೆಗಾದರೂ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಹಸ್ರಜೀವಿಗಳನ್ನು ಕಂಪು ಬಿಡುತ್ತಿದೆಯೇ?

೭. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೊದಲು ಗೆದ್ದಿದ್ದ ಅರಿವಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಮೊದಲು ಮೊದಲಾದಲ್ಲಿಯೆ ಒಂದೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಓದಿರಿ. ಅವುಗಳ ಪಕ್ಕದ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಯಿಸಿರಿ.

- (೧) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$;
- (೨) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$;
- (೩) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$;
- (೪) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$;

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೊದಲಾದಲ್ಲಿಯೆ ಅಲೇಖಗಳಿಗೆ ವಿವರದಲ್ಲಿ ಏನು ಕಂಪು ಬಿಡುತ್ತದೆ?

೮.

೮-೯. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸೂತ್ರವೊಳಗಿನ ಒಂದೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿಯೆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಹೇಳಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಆ ಅಲೇಖಗಳು

ಆರಂಭಸ್ಥಾನದೊಳಗಿಂದ (೦,೦) ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆ-
ಗಳಿರುತ್ತವೆಂಬುದು ಕಂಡು ಬಂದಿರುವುದು. ಯಾವುದರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಪದ
(Constant term) ಇಲ್ಲ, ಇಂಥ ಅಂದರೆ ಯ = ಮಕ್ಷ, ಆಯ +
ಕಕ್ಷ = ೦ ಇಂಥಸ್ವರೂಪದ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆರೇಖ-
ಗಳೆಂದರೆ ಆರಂಭಸ್ಥಾನದೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಗಳೇ
ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಷ = ೦ ಇದ್ದರೆ ಯ = ೦ ಇದ್ದಿರ-
ಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ ಈ ರೇಷೆಗಳು (೦,೦) ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ
ಹಾಯ್ದು ಹೋಗಲೇಬೇಕು.

೭.೧೦. ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟ್ಯಂ.
ತರವೆಂದರೆ ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಶೂನ್ಯ ಅಂತರವು, ಆದುದರಿಂದ ಯ = ೦ ಇದು
ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಿರುವುದು. ಆದರಂತೆಯೇ ಯ-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ-
ಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜಾಂತರವೆಂದರೆ ಯ-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರವು
ಶೂನ್ಯ, ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ = ೦ ಇದು ಯ-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಿರುವುದು.

೭.೧೧. ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷದಿಂದ ೫ ಮಾನಗಳ (Units) ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ
ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ
ಕೋಟಿಯು ೫, ಮತ್ತು —೫ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ
ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿಯು —೫,
ಆದುದರಿಂದ ಯ = ೫ ಮತ್ತು ಯ = —೫ ಇವು ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣ-
ಗಳಿರುವವು. ಆದರಂತೆಯೇ ೫ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವು-
ದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿಯು ೫ ಇರುವುದರಿಂದ ಯ = ೫
ಇದು ಆದರೆ ಸಮೀಕರಣವಿರುವುದು. ಯ = ೨, ಯ + ೩ = ೦
ಯ = ೬, ಯ + ೬ = ೦ ಇವು ಭುಜಾಕ್ಷಕ್ಕೆ (ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ) ಸಮಾಂ-
ವಿರುವ ರೇಷೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೭.೧೨. ಯ-ಅಕ್ಷದಿಂದ ೪ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ
ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜವು ೪, ಮತ್ತು —೪
ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾ-
ದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜ-೪, ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ = ೪, ಕ್ಷ = - ೪ ಇವು ಅವುಗಳ

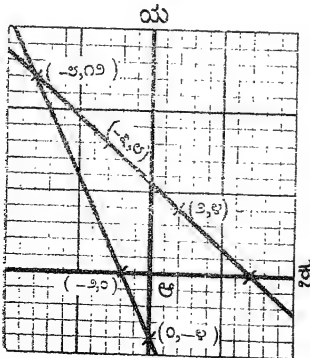
ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುವವು. ಅದರಂತೆಯೇ ಆ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜ ಆ, ಅದರಿಂದ $ಕ್ಷ = ಆ$ ಇದು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದು. $ಕ್ಷ = ೨$, $ಕ್ಷ + ೨ = ೦$, $ಕ್ಷ = ೯$, $ಕ್ಷ + ೯ = ೦$ ಇವು ಕೋಟಿಕ್ಷಕ್ಕೆ (ಯ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ) ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೨.೦೬. ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ೪ ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರೋಟ-ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿದ್ದು ಕಂಡುಬಂದಿರುವುದು. ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಯ = ಮಕ್ಷ + ಕ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಷ-ಪದವ ಸಹಗುಣಕವು ಅದೇ ಇರುವುದೋ, ಇಲ್ಲವೆ ಅಕ್ಷ + ಕಯ + ಗ = ೦ ಈ ಸ್ವರೂಪಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಕ್ಷ - ಪದ ಮತ್ತು ಯ ಕ್ಷ ಇವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆಯೋ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಲೇಖಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಯ = ಮಕ್ಷ + ಆ, ಯ = ಮಕ್ಷ + ಕ, ಯ = ಮಕ್ಷ + ಗ.... ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಲೇಖಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೨.೦೭. ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ೭ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರೋಟ-ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕಾಟಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿದ್ದು ಕಂಡುಬಂದಿರಬೇಕು. ಯಾವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಯ = ಮಕ್ಷ + ಕ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅವುಗಳ ಕ್ಷ-ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು -೧ ಬರುವುದೋ, ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಲೇಖಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕಾಟಿಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಯ = ಮಕ್ಷ + ಆ ಮತ್ತು ಯ = ಮಕ್ಷ + ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಲೇಖಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕಾಟಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆ.

೫.

೭.೧೫. ಯಾವದಾದರೊಂದು ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಹೇಗೆ ನಾವು ಅದರ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೀವೋ ಹಾಗೆಯೇ ಅದರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಅಲೇಖಕದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಬಂದ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನಾದರೂ ನಮಗೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರಬೇಕು. ಈಗ ಅವುಕ್ಕೆ ಬೆಲೆಗಳ ಯಾವ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ ಅಂಥವು ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವುದರ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಇರುವವೋ ಅಂಥ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತೀವೋ, ಅದರೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುತ್ತೀವೋ ಮತ್ತು ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದ ಅಲೇಖವಿರುತ್ತದೆಯೋ, ಹಾಗೆಯೇ ಅಲೇಖಿತ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯುವುದಿಲ್ಲವಾಗಿ ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು, ಅವುಗಳ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವದು ಮತ್ತು ಈ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕ ಅವುಕ್ಕೆಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು-



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೨.

ಕೊಂಡರೆ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಅದೇ ಬೇಕಾಗುವ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದು ಬರಬೇಕು. ಮುಂದಿನ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೨) ನಮಗೆ ಮಂಡಿಸುವುದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ನಾವು ನೋಡುವುದೇನೆಂದರೆ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯು $(2, 3)$ ಮತ್ತು $(-2, 3)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ

ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಸರಳ ರೇಷೆಯ ಸರ್ಟಾಧಾರಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು
 $ಯ = ಅಕ್ಷ + ಕ$ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಸರಳ ರೇಷೆಯು (೨, ೪).
 ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವುದರಿಂದ $ಕ್ಷ = ೨$, $ಯ = ೪$ ಇದ್ದರೆ
 ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಅದು (—೨, ೦)
 ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವುದರಿಂದ $ಕ್ಷ = -೨$, $ಯ = ೦$ ಇದ್ದರೂ
 ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗಬೇಕು. ಅದುವರಿಂದ

$$\begin{aligned} & \text{ಕ್ಷ} = ೨ \text{ ಮತ್ತು } ೦ \text{ ಯೆ ೪,} \\ & \text{ಕ್ಷ} = -೨ \text{ ಮತ್ತು } ೦ \text{ ಯೆ ೦} \\ \therefore & \text{ಅಕ್ಷ} = ೨ + ಕ \dots \dots \dots (೧) \\ \therefore & \text{ಅಕ್ಷ} = -೨ + ಕ \dots \dots \dots (೨) \end{aligned}$$

ಮಾಡುವುದರಿಂದ $೨ + ಕ = -೨ + ಕ$ \therefore ಅಕ್ಷ = ೦
 ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಕ್ಷ = ೦ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.
 $೨ + ಕ = ೦$ \therefore ಕ = -೨.

\therefore $ಯ = -೨ಕ್ಷ + ೦$ ಇದು ಬೇಕಾಗಿದ್ದ ಸಮೀಕರಣವು. ಇದ್ದು ಎದ್ದರೆ
 ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈಗ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೂ ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು
 ಪಕ್ಕಾಂತರದಿಂದ $೪ಕ್ಷ + ೫ಯ = ೦$ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ನಮ್ಮ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಷ್ಟಗೊಳ್ಳುವೆಯಿರುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಬೇಕೆಂದು
 ರೇಷೆಯು ಸರಳವಾದದ್ದಾಗಿರಬೇಕು. ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಈ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು
 ಕೊಂಡು ಅದರ ಸಹಸ್ರಗುಣಕಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $ಕ್ಷ$ ಮತ್ತು $ಯ$
 ಇವುಗಳಿಗಾಗಬೇಕೆ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ
 ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಬೇಕು. ಈ ರೇಷೆಯು (೨, ೦) ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ
 ಹೋಗುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು $ಕ್ಷ = ೨$, $ಯ = ೦$ ಎಂದು
 ಇಟ್ಟರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ಅಲ್ಲದೇ ಪತ್ತವ ಮೇಲಿನ ಎರಡನೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು-
 ಕೊಳ್ಳುವ. ಅದು (೦, -೪) ಮತ್ತು (-೨, ೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ
 ಹೋಗುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣವು $ಯ = ಮಕ್ಷ + ಗ$ ಎಂದು
 ತಿಳಿದರೆ $ಕ್ಷ = ೦$ ಇದ್ದಾಗ $ಯ = -೪$, ಮತ್ತು $ಕ್ಷ = -೨$ ಇದ್ದಾಗ $ಯ = ೦$,

$\therefore -೪=೦ \times ಮ + ಗ$ ಅಂ. ಗ = -೪,

$೦ = -೨ಮ + ಗ$ ಅಂ. ಮ = ೨ಗ = -೨.

\therefore ಯ = -೨ಕ್ಸ - ೪ ಇದು ಬೇಕಾಗಿತ್ತು ಸಮೀಕರಣವು. ಇಷ್ಟವಿದ್ದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ೨ಕ್ಸ + ಯ + ೪ = ೦ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು.

೭.೧೬. ಮೇಲಿನ (ಕ್ರ. ೧೨) ಎರಡೂ ಅರೇಖಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿ-
ದರೆ ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು (-೪, ೧೨) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆಂದು
ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅದರಿಂದ (-೪, ೧೨) ಈ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಅರೇಖಗಳಿಗೆ
ಸಾಧಾರಣವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕ್ಸ = -೪ ಮತ್ತು ಯ = ೧೨ ಎಂದು
ಇಟ್ಟರೆ ೪ಕ್ಸ + ೫ಯ = ೨೨, ಮತ್ತು ೨ಕ್ಸ + ಯ + ೪ = ೦ ಈ ಎರಡೂ
ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸೂರ್ತಶಿಯಾಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದು ಹಾಗೆ ಆಗೇ ಆಗುತ್ತದೆ.
ಆದುದರಿಂದ ಎರಡು ಏಕಾಕ್ಷಾತ ದ್ವಿವಕ್ಯ ಸಮುದಾಸಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು
ಕೊಟ್ಟು ಅವುಗಳ ಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅರೇಖ-
ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೇಳಬಹುದು. ಅರೇಖಗಳ ಭೇದನವೆಂದುವೆನ ಸಹ-
ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಅವುಗಳ ಮಾನಗಳಿರುವವು. ಈ ಸಂಗತಿಯ ವಿವರಣೆ-
ಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಅನುವಾಕದಲ್ಲಿ ವಿವರವಾಗಿ ಮಾಡಿದೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೮.

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಿಗಿಂದ
ಹೋಗುವ ಅರೇಖಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(೧) (೪, ೮) (೨, ೨), (-೧, -೭).

(೨) (೧, ೧೫), (-೧, -೧), (-೩, -೯).

(೩) (-೪, ೦), (೦, ೮), (೨, ೧೨). (೪) (-೪, -೭), (೦, -೪), (೨, -೧).

(೫) (-೩, ೬), (೦, ೫), (೩, ೪). (೬) (-೩, -೧), (೧, ೩), (೨, ೭).

(೭) (-೩, -೭), (೦, -೫), (೩, -೩), (೬, -೧).

(೮) (-೪, -೪), (೧, ೦), (೬, ೪), (೧೧, ೮).

(೯) (೫, ೨), (೧, ೧), (-೩, ೦), (-೭, -೧).

(೧೦) (-೭, ೫), (೧, ೧), (೩, ೦), (೫, -೧), (೭, -೨).

೭.೧೭. ಪ. ೬ ರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಾಡಿಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇ ಆ ಗಾಡಿಯು ಮತ್ತು ಪ. ೬ ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದರ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇ ಆ ಗಾಡಿಯು, ಇವೆರಡೂ ಸರಸ್ವತ ಸಿರವು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಓಡುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಿರವೂ ಮುಖಾನ್ವಿತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಮ್ಮ ಸ್ವರೂಪಗಳಿಂದ ಹೊರಟು ಮುಖಾನ್ವಿತ ಸುತರ ಮುಕ್ತಾಯದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮುಖಾನ್ವಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಅವು ದಿವ್ಯದಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಕೂಡಬೇಕು. ಒಂದೇ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲದ ಮೇಲೆ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಯಾವುದೋ ಅಕ್ಷರವೂ ನಾವು ಆ ಎರಡೂ ಗಾಡಿಗಳ ಮಾರ್ಗಕ್ರಮದ ಅರ್ಥವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಹಿಂದೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತೆಯೇ ಅದೇ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಕಡುವಾಯದ ಮೇಲೆ ನಾವು ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಸಮ್ಮಾ ಉದ್ದದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ಸಮ್ಮಾಉದ್ದದ ಮೇಲೆ ಬೆಳೆದ ೧೦೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಅದು ಮುಂದೆ ತಾನಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಿರುವದು, ಅದುವರಿಂದ ಸಮ್ಮಾಉದ್ದದ ಮೇಲೆ ಬೆಳೆದ ಅಂತರವು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ (೦ ತಾಸುಗಳ ಮೇಲೆ)

(೧೨ ಗಂಟೆಗೆ)

(೨ ಗಂಟೆಗೆ)

(೪ ಗಂಟೆಗೆ)

೧೦೦ ಮೈಲುಗಳು

೧೦೦ ಮೈಲುಗಳು

೨೦೦ ಮೈಲುಗಳಿರುವದು.

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವಂಥ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಸ್ಥಿ ಅವು - ನೆಳೆದಿರುವ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯ ಪ್ರವಾಸದ ಅರ್ಥವಾಗುವದು.

ಇನ್ನು ಎರಡನೇ ಗಾಡಿ. ಅದು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ಸಮ್ಮಾಉದ್ದದ ಮೇಲೆ ಬೆಳೆದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೇ ೧೦೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಮತ್ತು ತಾನಿಗೆ ೨೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಸಮ್ಮಾಉದ್ದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಿರುವದು. ಅದುವರಿಂದ ಸಮ್ಮಾಉದ್ದದ ಮೇಲೆ ಬೆಳೆದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಅಂತರವು

೧೨ ಗಂಟೆಗೆ,

೨ ಗಂಟೆಗೆ,

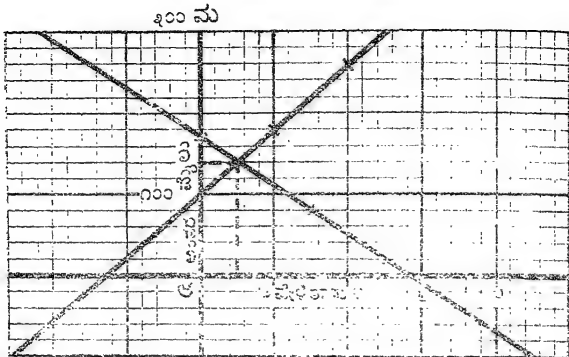
೫ ಗಂಟೆಗೆ.

೧೭೦ ಮೈಲುಗಳು

೨೦ ಮೈಲುಗಳು

೨೦ ಮೈಲುಗಳಿರುವದು.

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವಂಥ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಈ ಎರಡನೆಯ ಗಾಡಿಯ ಮಾರ್ಗ-ಕ್ರಮಣದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು.



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೨.

ಈಗ ಈ ಎರಡೂ ಗಾಡಿಗಳು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಭೇಟಿಯಾಗುವವೋ ಆ ವೇಳೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಸ್ಥಳವನ್ನೂ ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳ ಮೇಲೆ ಇರಲೇಬೇಕು. ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುವು ಅಂದರೆ ಯಾವ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಆ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಭೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಅಂತಹದು. ಅಲೇಖಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ (೧, ೧೪೦) ಇದು ಆ ಬಿಂದು-ಬಿಂದು ಕೂಡುವುದು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ ಮುಖ್ಯಸ್ಥನ ನಂತರ ೧ ತಾಸಿನ ಮೇಲೆ ಆ ಗಾಡಿಗಳು ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೧೪೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಭೇಟಿಯಾಗುವವು, ಮತ್ತು ಇದು ಸರಿಯೇ ಇರುವದು. ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಗಾಡಿಯು ೧ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ (೧೦೦+೪೦) ಅ. ೧೪೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ಮತ್ತು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ೧೨೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ

ಮೇಲೆ ಇರುವ ಮತ್ತು ನಮ್ಮೂರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೇ ೩೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಬರುವ ಗಾಡಿಯಾದರೂ ೧ ಗಂಟೆಗೆ (೧೩೦-೩೦) ಅಂ. ೧೪೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೀಲಿರುವುದು.

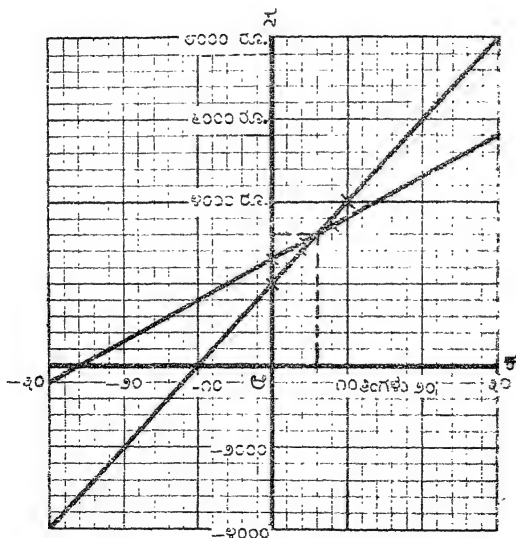
ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ (ವ) ಮತ್ತು ಅಂತರ (ಮಂ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $ಮಂ = ೧೦೦ + ೪೦ವ$ ಈ ಸೂತ್ರವೂ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು $ಮಂ = ೧೩೦ - ೨೦ವ$ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿ- ಸುತ್ತಲಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಂದರೆ $ಮಂ = ೧೦೦ - ೪೦ವ$ ಇದು ಮೊದಲನೇ ಅಲ್ಲದ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದು, $ಮಂ = ೧೩೦ - ೨೦ವ$ ಇದು ೨ ನೇ ಅಲ್ಲದ ಸಮೀಕರಣವಿರುವುದು. ಮತ್ತು ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ಅಲ್ಲದ ಮೇಲೆ (೦, ೧೦೦), (೨, ೮೦), (೪, ೬೦) ಈ ಬಿಂದು- ಗಳಿರುವವು. ಮತ್ತು $ವ = ೦, ೨, ೪$, $ಮಂ = ೧೦೦, ೮೦, ೬೦$ ಈ ಕೂಡಿರುವ ಜೊತೆಗಳಿಂದ $ಮಂ = ೧೦೦ + ೪೦ವ$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಅಲ್ಲದ ಮೇಲೆ (೦, ೧೩೦), (೦, ೮೦), (೪, ೬೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿರುವವು, ಮತ್ತು $ವ = ೦, ೨, ೪$; $ಮಂ = ೧೩೦, ೮೦, ೬೦$. ಈ ಕೂಡಿರುವ ಜೊತೆಗಳಿಂದ $ಮಂ = ೧೩೦ - ೨೦ವ$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಎರಡೂ ಅಲ್ಲದಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿರುವುದು ಎದೆಯಾಗುವುದು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ವತಿಯನ್ನು ಮಾಡುವಂಥ $ವ$ ಮತ್ತು $ಮಂ$ ಇವುಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಇರುವುದು. ಸಾಧಾರಣ ಬಿಂದುವಿನ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (೧, ೧೪೦) ಇವು ಇರುವುದರಿಂದ $ವ = ೧$, $ಮಂ = ೧೪೦$ ಈ ಜೊತೆಗಳಿಂದ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ವತಿಯಾಗಬೇಕು. ಮತ್ತು ನಮಗೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಕಾಣುವುದೂ ಇದೇ. $ಮಂ = ೧೦೦ + ೪೦ವ$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $ವ = ೧$ ಇದ್ದಾಗ $ಮಂ = ೧೦೦ + ೪೦ = ೧೪೦$. $ಮಂ = ೧೩೦ - ೨೦ವ$ $ವ = ೧$.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗುವ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮಸಾಸಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಿದ್ದರೆ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು

ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಆಲೇಖಗಳ ಹೇದನವಿಂದುವಿನ ಸಹನಿದೇಶಕಗಳೇ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳು.

೭.೧೮. ಇದೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿಯ ಹಿಂದಿನ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಪ. ೩ನೆಯದೊಳಗಿನ ವಸಂತರಾಯರ ಸಂಚಿತಫನದ ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ ಪ. ೭ನೆಯದೊಳಗಿನ ವಿಕ್ರಾಸರಾಯರು ಕೂಡಿಸಿಬಿಟ್ಟ ಹಣದ, ಈ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಎಂಬೇ ಕೋಡಿಗೆ ಅನುಸರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವಾ.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೮.

ವಸಂತರಾಯರ ಶಿಲಕು

ಇಂದು
೨೦೦೦ ರೂ.

೪ ತಿಂಗಳಾದ ನಂತರ.
೨೮೦೦ ರೂ.

೧೦ ತಿಂಗಳಾದ ನಂತರ
೪೦೦೦ ರೂ.

ಅಮೃತಲಿಂಗ (೦, ೨೦೦೦), (೪, ೨೦೦೦), (೧೦, ೪೦೦೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ವಸಂತರಾಯರ ಸಂಚಿತ ಧನದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ಅವರಂತೆಯೇ ವಿದ್ಯಾಸರಾಯರ ತಿಲಕು

ಇಂದು ೪ ತಿಂಗಳಾದ ಮೇಲೆ ೮ ತಿಂಗಳಾದ ಮೇಲೆ
 ೨೬೦೦ ರೂ. ೩೦೦೦ ರೂ. ೩೪೦೦ ರೂ.

ಅಮೃತಲಿಂಗ (೦, ೨೬೦೦), (೪, ೩೦೦೦), (೮, ೩೪೦೦)

ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ವಿದ್ಯಾಸರಾಯರ ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು (೨, ೩೦೦೦) ಈ ಬಿಂದು-
 ಒಂದರಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಇವರ ಅರ್ಥವ್ಯವಸ್ಥೆ ೬ ತಿಂಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ
 ನಂತರ ಇಬ್ಬ ರಲ್ಲಿಯೂ ಅಷ್ಟೇ ಹಣವು ಕೂಡಿದ್ದಿರುವದು, ಮತ್ತು
 ಇದು ನಿಜವೇ. ೬ ತಿಂಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ನಂತರ ವಸಂತರಾಯರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ
 (೨೦೦೦ + ೬ × ೨೦೦) ರೂ. ಅಂ. (೨೦೦೦ + ೧೨೦೦) ರೂ., ಅಂ.
 ೩೨೦೦ ರೂ. ಇರುವವು. ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾಸರಾಯರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿಯೂ
 (೨೬೦೦ + ೬ × ೧೦೦) ರೂ. ಅಂ. (೨೬೦೦ + ೬೦೦) ರೂ. ಅಂ. ೩೨೦೦
 ರೂ.ಗಳೇ ಇರುವವು.

ಈಗ ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇನಾದರೆ ವಸಂತರಾಯರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ
 ಸಂಚಿತ ಧನವು (ಸ) ಮತ್ತು ಕಾಲ (ಕ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು
 ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ಕ ಈ ಸೂತ್ರವೂ, ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾಸರಾಯರ
 ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಸ = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ಕ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.
 ಅಂದರೆ ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ಕ ಇದು ಮೊದಲನೇ ಅಲೇಖದ ಸಮೀಕರ-
 ಣವಿದ್ದು, ಸ = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ಕ ಇದು ಎರಡನೆಯದರದಿರುತ್ತದೆಂಬುದು
 ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ಅಲೇಖದ ಮೇಲೆ (೦, ೨೦೦೦), (೪, ೨೪೦೦),
 (೧೦, ೪೦೦೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಕ = ೦, ೪, ೧೦,
 ಸ = ೨೦೦೦, ೨೪೦೦, ೪೦೦೦ ಈ ಕೂಡಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸ = ೨೦೦೦
 + ೨೦೦ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಅಲೇಖದ
 ಮೇಲೆ (೦, ೨೬೦೦), (೪, ೩೦೦೦), (೮, ೩೪೦೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದು

ಕ = ೦, ೪, ೮; ಸ = ೨೬೦೦, ೩೦೦೦, ೩೪೦೦, ಈ ಕೂಡಿರುವ ಬೆಲೆ-
ಗಳಿಂದ ಸ = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ ಕೆ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

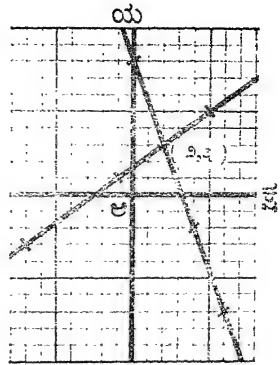
ಈಗ ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು (೬, ೩೨೦೦) ಈ ಬಿಂದು-
ನಿನ್ನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕ = ೬; ಸ = ೩೨೦೦ ಈ
ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ವತೆಯಾಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದು
ಪಾಗೆ ಆಗೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕೆ ಈ ಸಮೀ-
ಕರಣದಲ್ಲಿ ಕ = ೬ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕೆ = ೨೨೦೦ ಇರು-
ವದು. ಮತ್ತು ಸ = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ ಕೆ ಇವರಲ್ಲಿ ಕ = ೬ ಇದ್ದಾಗ ಸ =
೨೬೦೦ + ೧೦೦ × ೬ = ೨೬೦೦ + ೬೦೦ = ೩೨೦೦ ಇರುವದು.

೭.೧೯. ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ
ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ನಾಲ್ಕು ರೀತಿಗಳು, ಯೋಗ ವಿಯೋಗ ರೀತಿ
ಉತ್ಥಾಪನೆ ಇಲ್ಲವೆ ಅದೇಶರೀತಿ; ತುಲನೀತಿ ಮತ್ತು ವಜ್ರಭ್ಯಾಸರೀತಿ
ಇಲ್ಲವೆ ಕತ್ತರಿಯು ನಿಯಮ, ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದದ್ದು. ಇದು
ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಲೇಖ ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ ಬಿಡಿಸುವುದು ಐದನೇ
ರೀತಿಯು—ಅಲೇಖರೀತಿಯು—ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಾಗಿದೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿ-
ಯಿಂದ ಮುಂದೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾ. $೫x + ೨y =$
 ೧೬ , $೨x - ೩y + ೫ = ೦$ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ
ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. $೫x + ೨y = ೧೬$ ಇದರ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವ-
ದಾದರೆ $x = ೦$, $೪, ೬$ ಇದ್ದಾಗ $y = ೮, -೨, -೭$ ಇರುವದು. ಆದ್ದ-
ರಿಂದ ಅಕ್ಷವನ್ನು x ಅಕ್ಷವೆಂದು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷವನ್ನು y ಅಕ್ಷವೆಂದು ತಿಳಿದು (೦, ೮)
(೪, -೨) ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು (೬, -೭)
ಒಳಗಿಂದಾದರೂ ಹೋಗುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಇದು $೫x + ೩y = ೧೬$,
ಇದರ ಅಲೇಖವಾಯಿತು. ಈಗ $೨x - ೩y + ೫ = ೦$ ಇದರ ಅಲೇಖವನ್ನು
ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ

$x = -೭, -೧, ೫$ ಇದ್ದಾಗ $y = -೩, ೧, ೫$ ಇರುವದು.
(-೭, -೩), (-೧, ೧), (೫, ೫) ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು
ತೆಗೆದರೆ ಅದು $೨x - ೩y + ೫ = ೦$ ಇದರ ಅಲೇಖವಾಯಿತು.

ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ಬಂದ-
ಸ್ತೋಮ (೨,೩) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ
ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ; ಅದುವರಿಂದ $ಕ್ಷ =$
೨; ಯ = ೩.

[ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ
 $ಕ್ಷ = ೦$ ಯ ೩ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು
ಅವುಗಳ ಪೂರ್ಣಕತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು
ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅಕ್ಷ = ೦ ಯ
 $೫ \times ೦ + ೨ \times ೩ = ೦$; $೬ = ೦$,
ಅಕ್ಷ = ೩ ಯ ೦ $೦ + ೨ \times ೩ = ೬$
 $೬ = ೬$ ೪ = ೪ + ೫ = ೦.]



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೫.

೭-೦. ಅಕ್ಷ-೫. ೭-೨ಕ್ಷ ಈ ಏಕಘಾತ ಏಕವಕ್ರ ಸಮೀಕರ-
ಣವನ್ನು ನಮಗೆ ದೊಡ್ಡವಾದವು ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಅದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ಅಲೇಖ-
ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ದೃಢೀಕರಿಸಲು ಬರುವದೇ? ನಿಜವಾಗಿ ಬರುವದು. ಏಕವರ್ಣ
ಏಕಘಾತ ರಾಶಿಗಳ (ಅದರೆಯೇ ಫಲಗಳ) ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ
ತಿಗೆಯುವವೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಅದರಂತೆ ಅಕ್ಷ ಅಕ್ಷವೆಂದು ಕ್ಷ ಅಕ್ಷ
ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷವೆಂದು ಫಲ — ಅಕ್ಷವೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು, ೪ಕ್ಷ-೫
ಮತ್ತು ೭-೨ಕ್ಷ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವಾ. ೪ಕ್ಷ-೫
ಇದರ ಅಲೇಖವನ್ನು ತಿಳಿಯುವದಾದರೆ $ಕ್ಷ = -೧, ೦, ೩$ ಇದ್ದಾಗ
 $೪ಕ್ಷ-೫ = -೯, -೫, ೭$ ಇರುವದು.

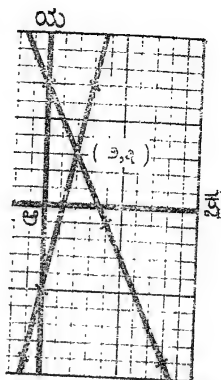
∴ $(-೧, ೯), (೦, -೫), (೩, ೭)$ ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ
ಸರಳ ರೇಖೆಯು ೪ಕ್ಷ-೫ ಇದರ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ಅದರಂತೆಯೇ ೭-೨ಕ್ಷ
ಇದರ ಅಲೇಖವನ್ನು ತಿಳಿಯುವದಾದರೆ,

$ಕ್ಷ = ೦, ೪, ೮$ ಇದ್ದಾಗ $೭-೨ಕ್ಷ = ೭, -೧, -೯$ ಇರುವದು.

∴ $(೦, ೭), (೪, -೧), (೮, -೯)$ ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ
ರೇಖೆಯು ೭-೨ಕ್ಷ ಇದರ ಅಲೇಖವಾಗುವದು.

ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು
(೨.೩) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆ.
ಅದರಲ್ಲಿ $k=1$, ಇಲ್ಲಿ ೩ ಇದು
ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಕ್ಕದ
ಬೆಲೆಯಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : ೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ ಸಮೀಕರಣದ
ಪೂರ್ಣತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟ-
ಪಡಿಸಿ. $k=1$ ಇದ್ದಾಗ ಎಂಬುದನ್ನು
ಉದಾಹರಣೆ : ೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ ಸಮೀಕರಣದ
ಪೂರ್ಣತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟ-
ಪಡಿಸಿ. $k=1$ ಇದ್ದಾಗ ಎಂಬುದನ್ನು



ಅರ್ಥವು ಕ್ರ. ೧೩.

೨.೨೧. ಸ್ಪಷ್ಟ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಸಮಗ್ರ ಕಂಡುಬರುವ-
ರೇಖೆಯು $k=1$ ಮತ್ತು $k=2$ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ-
ಬೆಲೆಯು $k=1$ ಮತ್ತು $k=2$ ಈ ಸಮಯಾಂಕ ಸಮೀ-
ಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಕ್ಷೇಪ ಮಾನವನ್ನು ತಿಳಿಯುವಂತೆಯೇ
ಇರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೂಲ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯ
ಬೆಲೆಯನ್ನು ಯ ಒಂದ ತೋರಿಸಿದರೆ $k=1$ ಮತ್ತು $k=2$ ಹೀಗೆ
ಆ ಸಮೀಕರಣವಾಗುವದು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ $k=1$ ಮತ್ತು $k=2$
ಮತ್ತು $k=1$ ಮತ್ತು $k=2$ ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸಮಯಾಂಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು
ಬಿಡಿಸುವವು. $k=1$ ಈ ರೀತಿಯ ಅರ್ಥವೇ $k=1$ ಮತ್ತು $k=2$ ಈ
ಸಮೀಕರಣದ ಅರ್ಥವು, ಮತ್ತು $k=1$ ಮತ್ತು $k=2$ ಈ ಅರ್ಥವೇ $k=1$ ಮತ್ತು $k=2$
ಅರ್ಥವು. ಮೇಲಿನ (ಕ್ರ. ೧೩) ಅರ್ಥದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಈ
ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೩೯.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅರ್ಥವುಗಳ ಸೂಚನೆಯಿಂದ

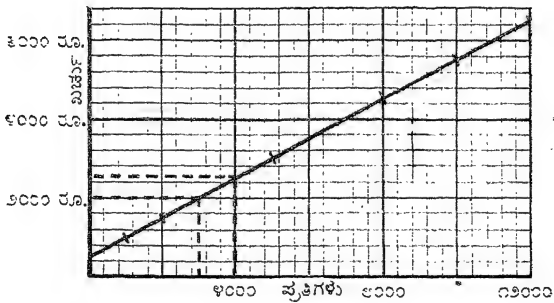
- (೧) $ಅಕ್ಷ-೩ಯ = ೨$; $ಅಕ್ಷ+೫ಯ = ೨೧$.
 (೨) $ಅಕ್ಷ-೫ಯ = ೧೨$; $ಅಕ್ಷ+೨ಯ = ೧$.
 (೩) $ಅಯ+೨ರ = ೧೫$; $ಅಯ-೨ರ = ೧$.
 (೪) $ಅತ+೨ನ = ೫$; $ಅತ-೨ನ = ೦$.
 (೫) $ಅಯ-೫ರ = ೧೩$; $ಅಯ+೪ರ = ೧೧$.
 (೬) $ಅಯ-೩ವ = ೯$; $ಅಯ+೨ವ = ೧೬$.
 (೭) $ಅಪ+೫ಮ+೧೫ = ೦$; $ಅಪ-೩ಮ = ೯$.
 (೮) $ಯ = ಅಕ್ಷ+೩$; $ಯ = ಅಕ್ಷ+೫$.
 (೯) $ಅಪ+೧೨ಮ = ೫$; $ಅಪ-೧೨ಮ = ೨$.
 (೧೦) $೧೨ಯ+೧೨ಕ್ಷ = ೫$; $೧೨ಯ+೧೨ಕ್ಷ = ೫$.
 (೧೧) $ಅರ-೧೨ವ = ೫$; $೧೨ರ-೨ವ = ೦$.
 (೧೨) $ಅರ+೩ಸ-೫ = ೦$; $ಅರ-೫ಸ-೮ = ೦$.
 ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.
 (೧೩) $ಅಕ್ಷ-೩ = ಅಕ್ಷ+೫$. (೧೪) $೩ವ+೨ = ೨-೩ವ$.
 (೧೫) $ಅರ-೩ = ಅ-೪$ (೧೬) $೩-೫ನ = ೮+೩ನ$.
 ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅನ್ಯಕ್ಷದ ಜೆಲಿಯು ಯಾವದಿದ್ದರೆ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ
 ರಾಶಿಗಳ (ಫಲಗಳ) ಜೆಲಿಗಳು ಸಮಾನವಿರುವವೆಂಬುದನ್ನು ಆಲೇಖ-
 ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಹೇಳಿರಿ.
 (೧೭) $ಅಕ್ಷ-೩$ ಮತ್ತು $೧೪-೩೧೨ಕ್ಷ$.
 (೧೮) $ಅಪ-೯$ ಮತ್ತು $೨೭-೫$.
 (೧೯) $೩ಸ+೪$ ಮತ್ತು $೮ಸ+೫$.
 (೨೦) $೯ನ+೧೨$ ಮತ್ತು $೯-೧-೧೪ನ$.

೭.

೭.೨೨. ಉ.೧. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ೧೦೦೦, ೨೦೦೦, ೫೦೦೦,
 ೮೦೦೦, ೧೦೦೦೦, ೧೨೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೦೦೦ ರೂ., ೧೫೦೦ ರೂ., ೨೦೦೦ ರೂ., ೨೫೦೦ ರೂ., ೩೦೦೦ ರೂ., ೩೫೦೦ ರೂ., ೪೦೦೦ ರೂ., ಹೀಗೆ ಖರ್ಚು ಬರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಿಸುವ ವೆಚ್ಚ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೨೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸುವದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬರುವದು ಮತ್ತು ೨೫೦೦ ರೂ. ವೆಚ್ಚ ಮಾಡಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಗಳು ಛಾಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ, ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಕ್ಷ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ (೦'೨೫"=೧೦೦೦ ಪ್ರ.) ಮತ್ತು ಛಾಪಿಸುವ ಖರ್ಚನ್ನು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ (೦'೨೫"=೧೦೦೦ರೂ.) ತೋರಿಸುವಾ. ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಿಸುವ ವೆಚ್ಚ ಇವುಗಳ



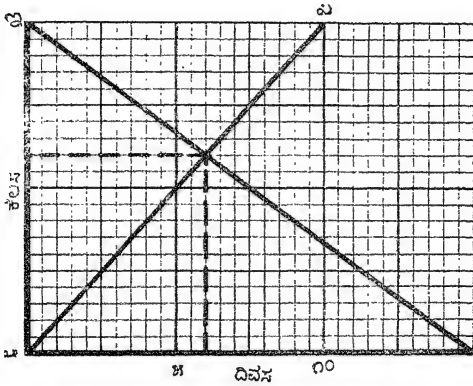
ಆಲೇಖ.ಕ್ರ. ೧೭.

ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಮಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ೨೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ೨೦೦೦ ರೂ. ಖರ್ಚು ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ೨೫೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ೪೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳು ಛಾಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಉ.೨. ಒಂದು ನೆಲವನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪಾಂಡುರಂಗನೊಬ್ಬನೇ ೧೦ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ರಾಮನು ೧೫

ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುವರು ?

ಅದ್ವ. ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕಾಲ ೦. ೨" = ೧ ದಿನದ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ೨" = ೧ ಕೆಲಸವನ್ನು ತೋರಿಸಿದರೆ ಅಪ ಇದು ಪಾಡುರಂಗನ ಕೆಲಸದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ರಾಮನು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ್ದಾನೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ ಇರ ಇದು ರಾಮನ ಕೆಲಸದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ಈ ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಅವರ



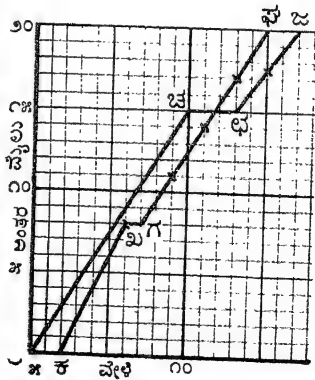
ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೮.

ಭುಜಾಂತರ ೬ ಇದ್ದುದರಿಂದ ೬ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಲೇಖ ಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ಕಂಡು ಬರುವುದೇನೆಂದರೆ ಪಾಡುರಂಗನು ಒಂದು ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ೬ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಿದ್ದು ರಾಮನು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೬ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಿದ್ದಾನೆ, ಅಂದರೆ ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಪೂರ್ಣ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಉ ೩. ಪ ಮತ್ತು ಬ ಈ ಎರಡು ಊರುಗಳು ಒಂದರಿಂದ ಒಂದು ೨೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಕೃಷ್ಣನು ಪ ಊರಿ-

ನಿಂದ ಬೆಳಿಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೪ ಮೈಲಿನಂತೆ ೨ ತಾಸುಗಳ ವರೆಗೆ ನಡೆದನಂತರ ಅರ್ಧ ತಾಸು ವಿಶ್ರಮಿಸುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೩ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಗೋವಿಂದನು ಅದೇ ಊರಿನಿಂದ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೩ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ೧೦ ಗಂಟೆಯ ವರೆಗೆ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ಒಂದೂವರೆ ಗಂಟೆ ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೨ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಆ ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಭೇಟಿಯಾಗುವರು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬೆಳಿಗೆ ೫ ಗಂಟೆಯ ನಂತರದ ಕಾಲವನ್ನು (೦.೨ = ೧ ತಾಸು) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಪ ಊರಿನಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರವನ್ನು (೦.೧"=೧ ಮೈ) ತೋರಿಸಿದರೆ ಕಖಗಘ ಇದು ಕೃಷ್ಣನ ಪ್ರವಾಸದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಮತ್ತು ಆಚಳಬ ಇದು ಗೋವಿಂದನ ಪ್ರವಾಸದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಅವು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಆ ಬಿಂದುವು ೧೦ ಹೊಡೆದು ೫೦ ಮಿನಿಟುಗಳ ಕಾಲವನ್ನು ಮತ್ತು ಆರಂಭ-ಸ್ಥಾನದಿಂದ ೧೫ ಮೈಲುಗಳ

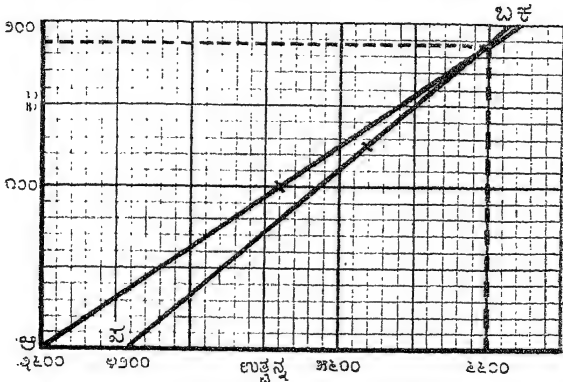


ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೯.

ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಹತ್ತು ಹೊಡೆದು ೫೦ ಮಿನಿಟುಗಳ ನಂತರ ಪ ಊರಿನಿಂದ ೧೫ ಮೈ. ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಭೇಟಿಯಾಗುವರು. ಉ.ಳ. ಮೊದಲನೆ ೩೬೦೦ ರೂ., ಗಳ ರಕಮಿಗೆ ಪೂರ್ಣ ಸೂಟು-

ಸಿಕ್ಕು ಉಳಿದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗೆ ೧ ಅಣೆಯಂತೆ ಕರವು ಆಕರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಎಷ್ಟು ಕರವು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತೋ ಅಷ್ಟೇ ಮೊದಲಿನ ೪೨೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ಣ ಸೂಟು-ಸಿಕ್ಕು ಉಳಿದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗೆ ೧| ಅಣೆಯಂತೆ ಕರವು ಆಕರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗಾದರೂ ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಷ್ಟು? ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಕರವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

ಅದ್ದೆ ಅದ್ದೆದ ಮೇಲೆ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು (೧" = ೧೦೦೦ ರೂ.) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅದ್ದೆದ ಮೇಲೆ ಕರವನ್ನು (೧" = ೧೦೦ ರೂ.) ತೋರಿಸಿದರೆ ಆಕ

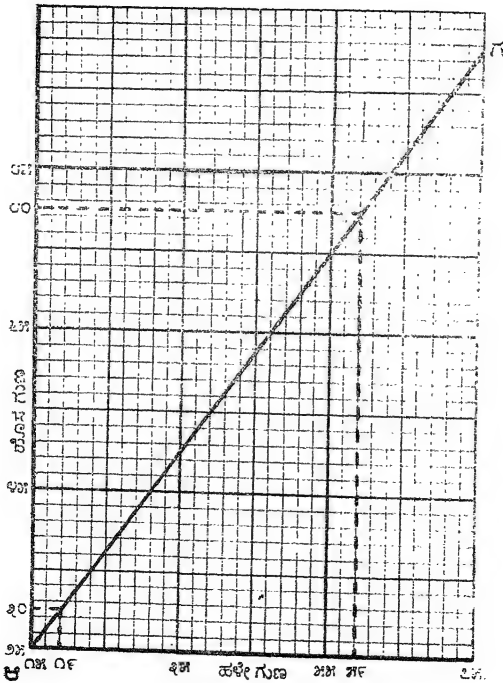


ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೦.

ಇದು ಕರವನ್ನು ಆಕರಿಸುವ ಹಳೇ ಪದ್ಧತಿಯ, ಮತ್ತು ಪೆಬ ಇದು ಹೊಸ ಪದ್ಧತಿಯ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಅದು ೬೬೦೦ ರೂ. ಇದ್ದು ೧೮೭೨ ರೂ. ಕರವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಂದು ಸ್ಥಿತಿ ತನಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ. ೫. ಬೀಜಗಣಿತದ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ೭೫ ಗುಣಗಳು ಸಿಕ್ಕವು. ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳು-

ವನನಿಗೆ ೧೫ ಗುಣಗಳು ದೊರೆತವು. ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳು ೧೦೦ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಕಡಿಮೆ ಗುಣಗಳು ೨೫ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಎಲ್ಲ ಗುಣಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ಗುಣಗಳು ಮತ್ತು ಈಗ ಕೊಡತಕ್ಕ ಗುಣಗಳು, ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಮೊದಲು

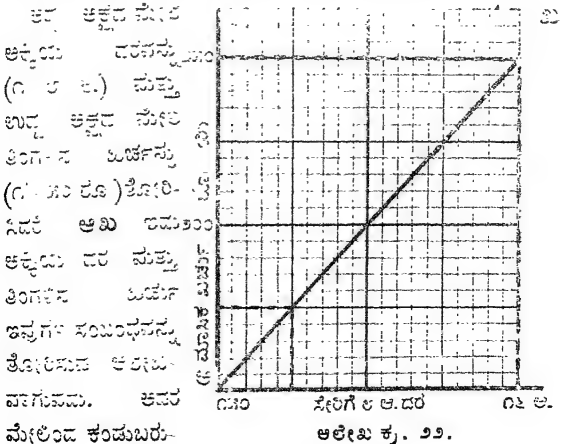


ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೦.

೧೯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದವನಿಗೆ ಈಗ ಎಷ್ಟು ಗುಣಗಳು ದೊರೆಯುವವೆಂಬುದನ್ನೂ ಮತ್ತು ಈಗ ೮೦ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಗುಣಗಳು ದೊರೆತಿದ್ದವೆಂಬುದನ್ನೂ ಹೇಳಿರಿ.

ಅವ ಪಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೊದಲನ ಗುಣಗಳನ್ನು (೧=೨೦) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಈಗಿನ ಪೂರ್ವ ಗುಣಗಳನ್ನು (೧=೨೦) ತೋರಿಸಿದರೆ ಆಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿರುವ ಅಕ್ಷವಾಗುವದು. ಆದರೆ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ೧೯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದವನಿಗೆ ಈಗ ೩೦ ಗುಣಗಳು ದೊರೆಯುವವನು, ಮತ್ತು ಈಗ ೮೦ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವವನಿಗೆ ಮೊದಲು ೫೯ ಗುಣಗಳು ಸಿಕ್ಕಿದ್ದವೆಂಬುದಾಗುವದು.

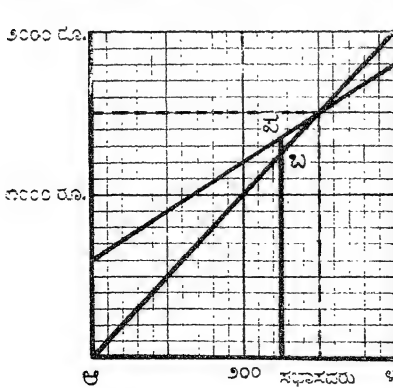
ಉ. ೩. ಅಕ್ಷಿಯು ಮೇಲೆ ಸೇರಿಗೆ ೮ ಅಣಿ ಇದ್ದಾಗ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ೨೦೦ ರೂ. ಇತ್ತು ಮತ್ತು ೧೨ ಅಣಿ ಇದ್ದಾಗ ೨೬೦ ರೂ. ಇತ್ತು. ದರವು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಏರಿ ಅದು ಸೇರಿಗೆ ೧ ರೂ. ಆದರೆ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು ಇರುವದು, ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ೧೭೫ ಇದ್ದಾಗ ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತು?



ಸಿದ್ಧೇನೆಂದರೆ ದರವು ರೂ. ೮೦. ೧೩ ಅಣೆ ಇದ್ದಾಗ ಖರ್ಚು ೨೫ ರೂ. ೨೦ರವದು, ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ೧೦೦ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ದರವು ೪ ಅಣೆ ಇರುವದು.

ಉ. ೭. ಒಂದು ಕ್ರೀಡಾಭವನದ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು, ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೦೦ ಇದ್ದಾಗ ೧೨೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೨೫೦ ಇದ್ದಾಗ ೧೩೫೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಸಭಾಸದರ ತಿಂಗಳಿನ ಚಂದಾ ೧ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ಭವನಕ್ಕೆ ಏನೂ ಹಾನಿಯಾಗಬಾರದೆಂದು ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಅಂದರೆ ಎಷ್ಟಿರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (೧ = ೨೦೦೦) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು (೧ = ೧೦೦೦ ರೂ.) ತೋರಿಸಿದರೆ ಕೆಳಗೆ ಈ ರೇಖೆಯು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚಿನ ಅಲೇಖವಾಗುವದು, ಮತ್ತು ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨೦೦ ಇದ್ದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ೧೦೦೦, ಮತ್ತು ೪೦೦ ಇದ್ದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಆಖ ಈ ರೇಖೆಯು ಉತ್ಪ-



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೩.

ಉತ್ಪನ್ನ ಅಲೇಖವಿರುವದು. ಈ ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವೋ ಅದು ೨೦೦ ಸಭಾಸದರು ಮತ್ತು ೧೦೦೦ ರೂ. ಇವುಗಳ ಸಿದ್ಧೇಶಕವಿರುವದು. ಇದರ

ಅರ್ಧವೇನೆಂದರೆ ೨೦೦ ಸಭಾಸದರು ಇವಾಗ ೧೫೦ ರೂ., ಏರ್ಪಡಿಸಲು-
ವದು, ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೂ ಅಷ್ಟೇ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಭವನಕ್ಕೆ
ಏನೂ ಹಾನಿಯಾಗಬಾರವೆಂದು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಅಂದರೆ ೨೦೦ ಸಭಾಸದರು
ಇರಲೇಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಸಭಾಸದರಿಂದ ಹಾನಿಯಾಗುತ್ತದೆ.
೨೦೦ ಸಭಾಸದರಿಂದಾಗ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೦೦ ರೂ., ಹಾನಿಯನ್ನು ಸಹಿಸಬೇಕಾಗು-
ತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲೆ ಪಲಿಕೆ ಈ ರೀತಿಯು ಈ ಹಾನಿಯನ್ನು
ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಉ. ಲ. ೩೦ ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ದಿನಾಲುಳಿ ರೂ., ಕೂಲಿಯನ್ನು
ಕೊಡುವ ಕರಾರಿನ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ನೇಮಿಸಿದೆ. ಅವನು
೨೦ ದಿನ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ಬಾರದಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೧ ರೂ.,
ದಂಡವಾಗತಕ್ಕದ್ದು. ೩೦ ದಿನಗಳ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ದಂಡದಡಣ
ಕಳೆಯಲಾಗಿ, ೯೦ ರೂ. ದೊರೆತರೆ, ಅವನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ
ಕೆಲಸಕ್ಕಿದ್ದನು ?

ಅದ್ವ. ಅದ್ವ. ಮೇಲೆ ದಿನಗಳನ್ನು (೧.೧" = ೧ ದಿನ) ಮತ್ತು
ಉದ್ವ. ಅದ್ವ. ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು (೧.೧" = ೬ ರೂ.) ಆದರೆ ಈ
ರೀತಿಯು ಹೇಗೆ ಅವನು ೩೦ ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಹಾಜರಿರಿದ್ದನ್ನು ತೋರಿಸು-
ತ್ತದೆಯೋ ಅದರಂತೆ ಪಲಿಕೆ ಈ ರೀತಿಯು ಅವನು ೩೦ ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ
ಹಾಜರಾಗಿರಲಿಲ್ಲವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ರೀತಿಯು ೨೦ ರೂ.
ದಂಡವನ್ನು ತೋರಿಸುವದು ಮತ್ತು ಪಲಿಕೆ ಇದು ದಂಡದ ಅರ್ಥವಾಗುವದು.
ಅದು ರೀತಿಯು ಅವನು ಹಾಜರಾದ ದಿನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿದರೆ ಮಗ
ರೀತಿಯು ಅವನು ಹಾಜರಾದ ದಿನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಮನ
ಅವನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು, ಮತ್ತು ಮಗ ಇದು ಅವನಿಂದ ಸಮೂಹ ಅಗ-
ತಕ್ಕಾಥ ದಂಡವನ್ನು ಮತ್ತು ಕೆಲಸ ಇದು ದಂಡದ ಹಾನಿಯನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ
ಅವನ ಕೈಯಲ್ಲಿ ದೇವನ ಹಣವಿರುವದು. ಎರಡು ಅರ್ಥವುಗಳಿಗಿರುವ ಉದ್ವ.
ಅಂತರವಿರುವ ದಂಡವನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಅವನು ಹಾಜರಾದ ಕೈಯಲ್ಲಿ ದೇವನ
ಹಣವು ಇರುವದು. ಈಗ ಆ ಎರಡು ಅರ್ಥವುಗಳಿಗಿರುವ ಉದ್ವ. ಅಂತರವು,
(ಕೊಡುಗಳಿಗಿರುವ ಅಂತರವು) ೯೦ ರೂ.ವಾಗಿ ಇರುವದಿರುವದನ್ನು ನೋಡು-

(ಅ). ೨೫ ದಿನದ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸ ನಿರ್ವಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ?

(ಆ). ೧೫ ರೂ. ಶಿಲಕು ಇದ್ದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸದ ದಿನಗಳನ್ನು ?

(ಇ). ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದೊಳಗಿಂದ ೧೫ ರೂ. ತೆಗೆದುಬೇಕಾದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸವು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳವರೆಗೆ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ?

(ಈ). ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಬರ್ಚು ಇವು ಸರಿಯಾಗಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸ ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು ?

೧. ಅಕ್ಕಿಯ ದರವು ರೂ.ಗೆ ಒಂದೂವರೆ ಸೇರು ಇದ್ದು ಗೋದಿಯ ದರವು ರೂ.ಗೆ ಎರಡೂವರೆ ಸೇರು ಇದ್ದಾಗ ಅಕ್ಕಿ ಮತ್ತು ಗೋದಿ ಇವುಗಳ ವಿನಿಮಯದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ ಮೇಲಿಂದ ೨೦ ಸೇರು ಗೋದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎಷ್ಟು ಸೇರು ಅಕ್ಕಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ೧೫ ಸೇರು ಅಕ್ಕಿ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಗೋದಿಯನ್ನೂ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೨. ಒಂದರಿಂದೊಂದು ೨೧ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ೮ ಮತ್ತು ೮ ಈ ಎರಡು ಊರುಗಳಿಂದ ರಾಮ ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದ ಇವರಿಬ್ಬರೂ ಒಬ್ಬರಿಗೊಬ್ಬರು ಭೇಟಿಯಾಗುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೊರಡುತ್ತಾರೆ. ರಾಮನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅವನ ತಾಸಿನ ಸರಾಸರಿ ನಡಿಗೆಯು ೩ ಮೈಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನು ೫|| ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ಅವನ ತಾಸಿನ ನಡಿಗೆಯು ೩|| ಮೈಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಭೇಟಿಯಾಗುವರೆಯೆಂಬುದನ್ನು, ಅವರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೇಳಿ. ೬|| ಗಂಟೆಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವಿರುವದು ? ೧೩ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರವಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆ ಆಗಿರುವದು ?

೩. ವಸಂತನು ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ತಾಸುಗಳನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ತಾಸು ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ಪಡೆದು ಮುಂದೆ ಆಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಸಹೋದರನಾದ ಅರವಿಂದನು ಹಿಂದಿನಿಂದ ಮೋಟಾರ ಸಾಯಕಲ್ಲಿನಿಂದ ೯ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೨೪ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರೂ

ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಭಿಟ್ಟಿಯಾಗುವುದನ್ನು ಅವರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೇಳಿರಿ. ೧೦ ಗಂಟೆಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವಿರುವದು ? ೧೬ ಮೈಲು ಅಂತರವಿದ್ದಾಗ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಯಾಗಿರುವದು ?

೫. ಬಿಸ್ಮತ್ಪುನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲುಗಳ ನಡಿಗೆಯಿಂದ ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಒಂದೂವರೆ ತಾಸುಗಳ ನಂತರ ಅರ್ಧ ತಾಸು ವಿರಾಮತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ತಿಮ್ಮಪ್ಪನು ಹಿಂದಿನಿಂದ ಸಾಯಕ್ಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ೯ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ಅವನಿಗೆ ೧೧ ಗಂಟೆಗೆ ಭಿಟ್ಟಿಯಾಗುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ತಿಮ್ಮಪ್ಪನು ತಾಸಿಗೆ ಯಾವ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಾನೆಯೆಂಬುದನ್ನೂ, ೧೦ ಗಂಟೆಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನೂ, ಮತ್ತು ಎರಡು ಮೈಲು ಅಂತರವಿದ್ದಾಗ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಎರಡು ಪರಿಘವು ವ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನಿಯಮವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೧೬ ಇಂಚು, ಮತ್ತು ೩೨ ಮತ್ತು ೪೮ ಇಂಚು ವ್ಯಾಸಗಳಿರುವ ಎರಡುಗಳ ಪರಿಘಗಳನ್ನೂ, ಮತ್ತು ೧೬ ಇಂ. ೨೨ ಇಂ. ಮತ್ತು ೩೩ ಇಂ. ಪರಿಘಗಳುಳ್ಳ ಎರಡುಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೭. ಫರನಾಹೀಬೆ ಬುಘ್ಲ ತಾಮಾಪಕದಲ್ಲಿ ಹೆಪ್ಪುಗಟ್ಟುವ ಬಿಂದುವು ೩೨ ಮತ್ತು ಕುದಿಯುವ ಬಿಂದುವು ೨೧೨ ಇದ್ದು ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ್ ಬುಘ್ಲ ತಾಮಾಪಕದಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೦, ಮತ್ತು ೧೦೦ ಇರುತ್ತವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಎರಡೂ ಬುಘ್ಲ ತಾಮಾಪಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಬುಘ್ಲ ತಾಮಾನಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೂಪಾಂತರಾಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ೬೮°ಫ್, ೮೬°ಫ್, ೧೪೦°ಫ್. ಗಳ ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ್ ಬುಘ್ಲ ತಾಮಾಪಕದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ೧೦°ಸೆಂ, ೪೦°ಸೆಂ, ೫೦°ಸೆಂ, ಗಳ ಫರನಾಹೀಬೆ-ನಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿರಿ.

೮. ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಮಾಡುವವನಿಗೆ ದಿನಾಲು ೨|| ರೂ. ಸಂಬಳ ಕೊಡುವ, ಮತ್ತು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬರದೇ ಇದ್ದ ದಿನಕ್ಕೆ ೪೮ ಪೈ. ದೊಡ್ಡ, ಈ ಕರಾರಿನ

ಮೇಲೆ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ೪೦ ದಿನಗಳ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ೭೮ ರೂ. ಗಳು ಮೊರೆತರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಕೆಲಸದ ಮೇಲಿದ್ದನು ?

೯. ರಾಮನು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ೨೦ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನು ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ೩೦ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸುವರು ?

೧೦. ಒಂದು ಹೌದು, ನೀರನ್ನು ಒಳಗೆ ಸುರಿಸುವ ನಳದ ಬಾಯಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ೧ ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ತುಂಬುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ನೀರನ್ನು ಹೊರಗೆ ಬಿಡುವ ಬಾಯಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ೧ ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ತೆರವಾಗುತ್ತದೆ; ಅದರ ಎರಡೂ ನಳಗಳ ಬಾಯಿಗಳನ್ನು ತೆರೆದರೆ ಆ ಹೌದು ಎಷ್ಟು ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬುವದು ?

೧೧. ಗಣಿತದ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ೮೫ ಗುಣಗಳು ಮೊರೆತವು, ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ೧೫ ಗುಣಗಳು ಸಿಕ್ಕುವು. ಮೊದಲನೇ ಕ್ರಮಾಂಕದ ಗುಣಗಳು ೯೫ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದು ೨೦ ಇರುವಂತೆ ಬದಲಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಮೊರೆತ ಗುಣಗಳು ಮತ್ತು ಮೊಸ ಗುಣಗಳು ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ಯಾವನಿಗೆ ೨೫ ಗುಣಗಳು ಮೊರೆತಿರುವವೋ ಅವನಿಗೆ ಈಗ ಎಷ್ಟು ಮೊರೆಯುವವು, ಮತ್ತು ಯಾವನಿಗೆ ಈಗ ೮೦ ಗುಣಗಳು ಮೊರೆಯುವವೋ ಅವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಮೊರೆತಿರುವುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೨. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ೧೦೦೦ ಪುಟಗಳನ್ನು ಮುದ್ರಿಸುವದಕ್ಕೆ ೪೦೦ ರೂ. ಏರ್ಪಡ ತಗಲುತ್ತದೆ, ೨೦೦೦ ಪುಟಗಳಿಗೆ ೬೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೫೦೦೦ ಪುಟಗಳಿಗೆ ೧೨೦೦ ರೂ. ಏರ್ಪಡ ತಗಲುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಣದ ವೆಚ್ಚ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೩೦೦೦ ಪುಟಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಏರ್ಪಡ ತಗಲುವದು ಮತ್ತು ೧೬೦೦ ರೂ. ಏರ್ಪಡ ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸಿದ್ದಿರುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೩. ಒಂದು ವಸತಿಗೃಹದ ತಿಂಗಳಿನ ಏರ್ಪಡ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೦ ಇದ್ದಾಗ, ೧೨೦೦ ರೂ. ಇದ್ದು ೬೦ ಇದ್ದಾಗ ೧೩೦೦ ರೂ.

ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಬಿರ್ಚು ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ೨೫ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾಗ ಬಿರ್ಚು ಎಷ್ಟು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ಬಿರ್ಚು ೧೪೫೦ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟಿರುವರೆಯುವದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. ದಶತಿಗ್ರಹದ ತಿಂಗಳಿನ ಅಕರಣೆಯು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫೦ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ವಾಸಿಯಾಗುವಾರವೆಂದು ಅತಿ ಕಡಿಮೆಯೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರಬೇಕು?

೧೪. ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳಿನ ಬಿರ್ಚು ಮನೆಯಲ್ಲಿ ೮ ಜನರು ಇದ್ದಾಗ ೬೦೦ ರೂ. ಇರುವದು, ೨ ಜನರು ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ೬೫೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಕುಟುಂಬದೊಳಗಿನ ಒಬ್ಬನು ಬೇರೆ ಊರಿಗೆ ಹೋದಾಗ ೧೪೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಕುಟುಂಬದೊಳಗಿನ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಬಿರ್ಚು ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೫ ಜನರಿಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಬಿರ್ಚು ಬರುವದು ಮತ್ತು ೬೮೦ ರೂ. ಬಿರ್ಚು ಬಂದಿರುವಾಗ ಎಷ್ಟು ಜನರಿರುವರೆಯುವದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೫. ಒಬ್ಬ ಅಧಿಕಾರಿಯ ತಿಂಗಳಿನ ಪಗಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಬದಲಿಯಾಗುತ್ತಿದ್ದು ೬ ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯ ನಂತರ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳವು ಉಂಟು ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ೧೦ ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯ ನಂತರ ಅದು ೬೦೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನೌಕರಿಯ ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ಅವನ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೪ ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಂಬಳ ದೊರೆಯುವದು, ಮತ್ತು ೭೨೦ ರೂ. ಸಂಬಳ ದೊರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೬. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ದರದ ಕೆಲವಷ್ಟು ಮತ್ತು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨|| ದರದ ಕೆಲವಷ್ಟು ಹೀಗೆ ೧೦೦ ರತ್ನಲು ಚಹವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಅದರ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯು ೨೨೦ ರೂ. ಆಯಿತು. ಏಕಾಗಾದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರಹದ ಚಹವನ್ನು ಎಷ್ಟು ತೆಗೆದು

ಪರೀಕ್ಷಾತ್ಮಕ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಗಳು

ಪತ್ರಿಕೆ ೧ ನೆಯದು

೧. ಯ^೨ + ಯ^೨ — ೧೫ಯ^೨ — ೨೫ಯ^೨ + ೧೪ಯ^೨ + ಕ ಇದಕ್ಕೆ
ಯ — ೪ ರಿಂದ ನೀರೇಷ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಕ = ? ಮತ್ತು ರಾಶಿಗಳ
ಅವಯವಗಳಾವವು ?

೨. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೪ಯ^೨ — ೪ಯ^೨ — ೨೫ಯ^೨ +
೧೫೪ಯ^೨ — ೧೫೪ಯ^೨ + ೪೦ ಇದ್ದು ಅವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ ೨ಯ — ೧
ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೩. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$(ಅ) \frac{ಕ^೨ + ಗ^೨ + ಫ^೨}{(ಗ-ಫ)^೨ + (ಫ-ಕ)^೨ + (ಕ-ಗ)^೨}$$

$$(ಆ) \frac{ಪ^೨ - ಪ^೨ಮ - ಪಮ^೨ + ಮ^೨}{ಪ^೨ - ಪ^೨ಮ - ಪಮ^೨ + ಮ^೨}$$

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) \frac{ನ+೧೨}{೫} - \frac{೨೧}{೪} - \frac{ನ+೫}{೪} = \frac{ನ}{೨} - \left(\frac{ನ+೧}{೪} \right)$$

$$(ಆ) \frac{೨ಯ+೨೨}{೧೨} = \frac{೨೨-೨ಯ}{೫} = ೨$$

೫. ೨೫ ರೂ. ಯ ಆ. ೬ ಪೈಗಳಿರುವ ಚೀಲದೊಳಗಿಂದ ೧೫ ರೂ.
(ಯ+೪)ಆ. ೯ ಪೈಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಉಳಿಯುವದು ?

೬. ಪ=ಯ — $\frac{೧}{೨}$ ಮತ್ತು ಮ=ಯ — $\frac{೧}{೨}$ ಇದ್ದರೆ
ಮ — ೪ಪ = ಪ ಎಂಬ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

೭. ಆ ಲೇಖನವನ್ನು ತೆಗೆದು ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೫ಕ್ಷ + ೪ಯ = ೨೨, \frac{ಕ್ಷ}{೪} + \frac{ಯ}{೬} = ೧$$

೮. ಅಂಶದೊಳಗಿಂದ ೩ ಕಳೆದರೆ ಬೆಲೆಯು ೩ ಮತ್ತು ಭೇದವಲ್ಲಿ ೨ ಕೂಡಿ-
ಸಿದರೆ ೩ ಅಗುವಂಥ ಅಮೂರ್ತಾಂಕವು ಯಾವುದು ?

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ ನೆಯದು

೧. (ಅ) ಪ + ಬ + ಮ = ೬ ಮತ್ತು ಮ + ಬ + ಪ = ೧೪ ಇದ್ದರೆ,
ಪ + ಬ + ಮ = ?

(ಆ) ಯ + ರ + ಲ = ೦ ಮತ್ತು ಯ + ರ + ಲ = - ೨ ಇದ್ದರೆ
ಯ + ರ + ಲ = ?

೨. ೫ಯು — ೨೩ಯು — ೧೦ಯು — ೭ಯು + ೪೫ ಇದ್ದೊಳಗಿಂದ
ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷಕ್ಕೆ ಯ — ೫ ರಿಂದ ಭಾಗ
ಹೋಗುವದಿಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ.

೩. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

$$(ಅ) \left(\frac{೧}{೧-ಯ} - \frac{ಯ}{೧-ಯು} \right) \div \left(\frac{೧}{೧+ಯ} + \frac{ಯ}{೧-ಯು} \right).$$

$$(ಆ) \frac{೧}{೩ + \frac{೨}{ಯ-೧}} \times \frac{೧}{ಯ-೩ + \frac{೧}{೩ + \frac{೨}{ಯ-೧}}}$$

೪. ೩೨ಯು + ೧೦೦ಯು — ೩ಯು — ೪೫ ಮತ್ತು ೩೨ಯು +
೮೨ಯು — ೫೭ಯು — ೪೫ ಇವುಗಳ ಮ, ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.
ಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ.

೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) \frac{೩ಯು-೭೨}{೫} + \frac{೪ಯ+೯೨}{೩} = \frac{೯ಯು+೩೨}{೧೫} - \frac{೮ಯ-೩}{೯}$$

$$(ಆ) \frac{ಯ-೮}{೪} + \frac{ಯ+೮}{೫} = ೪೧; \frac{ಯ-೮}{೫} - \frac{ಯ+೮}{೧}$$

೬. ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) $೬೦೦ + ೧೨೦೦ + ೬೦೦ - ೫೦ - ೫೦ - ೬$.

(ಆ) $(೧೦ + ೨) + (೧೦ - ೫) + ೨(೧ - ೧)$.

(ಇ) $೬೦೦ - ೪೦೦ + ೨೬೦$.

೭. ರಾಜಾಜಿ ಬೆಳಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ತನ್ನ ಮನೆಯಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲುಗಳ ಸಡಿಲಿಯಿಂದ ೧೨ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ತರುವಾಯ ೮ ಗಂಟೆಗೆ ಅವನ ತಮ್ಮನಾದ ಗೋಪಾಲನು ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಅದೇ ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಅಂತರವನ್ನು ತನೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ ಮೇಲಿಂದ ಅವರು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಮನೆಯಿಂದ ಬಂದು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಭಿಕ್ಷೆಯಾಗುವರೆಯಾದವು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಎರಡು ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವೇ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸುವುದು ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ವೇರಿಯು ೧೯ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವರೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೪೫ ಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು.

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ನೆಯದು

೧. ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) $೧೦೦ + ೨೦೦ - ೫೦ - ೧೫೦ + ೪೦ + ೧೦$.

(ಆ) $(೧೦ + ೧೦)(೧೦ + ೧೦) - ೨$.

(ಇ) $೨(೧ - ೧) - ೨(೧ - ೧) - ೧(೧ - ೧)$.

೨. $೧೦೦ - ೧೦೦ + ೨$ ಮತ್ತು $೨೦೦ - ೨೦೦ + ೨$ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಯು-೨ ಇದ್ದರೆ ಅ= ? ಕ= ?

೩. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

$$(ಅ) \frac{(೧ - \frac{ಮ}{ಪ}) (೧ + \frac{ಪ}{ಮ})}{\frac{ಪ}{ಮ} + \frac{ಮ}{ಪ}} \div \frac{\frac{೧}{ಮ} + \frac{೧}{ಪ}}{\frac{೧}{ಮ} + \frac{೧}{ಪ}}$$

$$(ಆ) \quad \frac{\frac{ಪ-ಬ}{ಪ} - \frac{ಪ+ಬ}{ಬ}}{\frac{ಪ-ಬ}{ಪ+ಬ} - \frac{ಪ+ಬ}{ಪ-ಬ}}$$

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಆ) \quad \frac{೧೦೦೦-೭}{೭} + \frac{೭(೧೦೦೦-೧)}{೭}$$

$$= \frac{೧೭೦೦೦+೭೦೦}{೭೦} + \frac{೭೦೦೦-೭೦}{೧೭}$$

$$(ಆ) \quad ೧೦\left(\frac{೧}{೧೦} - \frac{೧}{೮}\right) = ೦; \quad ೧೦\left(\frac{೧}{೧೦} + \frac{೧}{೮}\right) + ೧೭ = ೦.$$

೫. ಕ+ಗ+ಘ=೧, ಕ೨+ಗ೨+ಘ೨=೨೧ ಮತ್ತು ಕಗಘ=೮
ಇದ್ದರೆ ಕ೨+ಗ೨+ಘ೨=? ಮತ್ತು (ಕ+ಗ)(ಗ+ಘ)(ಘ+ಕ)=?

೬. ಪರಿಘಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠ-
ಫಲವು ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಯಮದ ಮೇಲಿಂದ ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲ (ಪ)
ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ (ತ್ರಿ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ
ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ ಮೇಲಿಂದ ೨೧ ಇಂ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ
ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲವನ್ನೂ ಮತ್ತು ೨೪೬೪ ಚೌ. ಇಂ. ಪೃಷ್ಠಫಲವುಳ್ಳ
ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ಹೇಳಿರಿ :

$$(ಗ = \frac{೨೨}{೭})$$

೭. ಒಬ್ಬ ಸಾಯಕಲಾಸವಾರನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ೨ ಊರಿ-
ನಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ೩೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿ-
ರುವ ಬ ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ
ಪ್ರವಾಸದ ನಂತರ ಅರ್ಧತಾಸು ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ.
೯ ಗಂಟೆಗೆ ಬ ಊರಿನಿಂದ ೨ ಊರಿನ ಕಡೆಗೆ ಬರಲು ಹೊರಟ ಬೇರೊಬ್ಬ
ಪ್ರವಾಸಿಗನು ತಾಸಿಗೆ ೩೦ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಮೋಟಾರಿನಿಂದ ಹೊರಡು-
ತ್ತಾನೆ. ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಆರೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ
ಎಲ್ಲಿ ಭಿಟ್ಟಿಯಾಗುವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಒಬ್ಬ ಗವಳಿಗನು ೬೦೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಆಕಳುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಆಕಳುಗಳ ಬೆಲೆಯು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೫೦ ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೬ ಆಕಳುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು ಮತ್ತು ೫೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ೪ ಆಕಳುಗಳು ಕಡಿಮೆ ದೊರೆಯುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಕಳಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

ಪತ್ರಿಕೆ ೪ ನೆಯದು

೧. ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

$$(ಅ) ಬ(ಮ-ಪ)^2 - ಮ(ಪ-ಬ)^2 - ಪ(ಬ-ಮ)^2$$

$$(ಆ) ಪ^2 - ಬ^2 - ಮ^2 + ೨ಬಮ - ಪ + ಬ + ಮ.$$

$$(ಇ) \frac{ಯ^2}{ಆ} + \frac{ಆ^2}{ಯ} + ೧.$$

೨. $ಯ^2 + ೫ಯ^2 + ೪ಯ - ೩ಕ$ ಮತ್ತು $ಯ^2 - ೩ಯ^2 + ೨೨ಯ + ೧೪ಕ$ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಯ-೨ ಇದ್ದರೆ, ಅ=? ಕ=?

೩. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

$$(ಅ) \left(೧ - \frac{೧}{ಯ-೧} \right) \left(ಯ-೨ + \frac{೧}{ಯ} \right)$$

$$\times \frac{\left(\frac{೧}{ಯ-೨} \right)^2 - ಯ+೨}{೧ + \frac{೧}{ಯ-೨}} \div \left(ಯ-೧ + \frac{೧}{ಯ-೨} \right).$$

$$(ಆ) \frac{ಯ+ಪ}{(ಪ-ಮ)(ಯ+ಮ)} + \frac{ಯ+ಮ}{(ಪ-ಮ)(ಯ+ಪ)} - \frac{ಪ-ಮ}{(ಯ+ಪ)(ಯ+ಮ)}$$

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) \frac{೧}{೪} \left(ಸ + \frac{೧}{೮} \right) - \frac{೧}{೩} \left(ಸ - \frac{೪}{೫} \right) = \frac{೧೩}{೪೦}.$$

$$(ಆ) \frac{೧೫}{ಯ+೪} + \frac{೧೩}{ಯ-೪} = ೧೭;$$

$$\frac{೯}{ಯ+೪} - \frac{೨}{ಯ-೪} = ೧.$$

೫. (ಆ) $ಯ + \frac{೧}{ಯ} = ಪ$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^೪ + \frac{೧}{ಯ^೪} =$
 $ಪ^೪ - ೪ಪ^೨ + ೨$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

$$(ಆ) ಯ + \frac{೧}{ಯ} = \frac{೧೦}{೨} ಇದ್ದರೆ ಯ^೪ + \frac{೧}{ಯ^೪} = ?$$

೬. ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಅಂತರವು ೫ ಇದ್ದು ಅವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದೀರ್ಘಮ ೧೪೩ ಇದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೭. (೦, ೫) ಮತ್ತು (೩, -೭) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯು (೫, ೦) ಮತ್ತು (-೭, ೩) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಿ ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೮. ಒಂದು ಊರಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಒಂದು ಉಗಿ-ಬಂಡಿಗೆ ಅದರ ನಿತ್ಯದ ವೇಗದಿಂದ ಎಷ್ಟು ವೇಳೆಯು ತಗಲುತ್ತದೆಯೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅದರ ವೇಗವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ೨|| ತಾಸುಗಳು ಕಡಿಮೆ ತಗಲುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವೇಗವನ್ನು ೫ ಮೈಲುಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ನಿತ್ಯದ ವೇಗಿಗಿಂತ ಎರಡು ತಾಸುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಊರೊಳಗಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

ಪತ್ರಿಕೆ ೫ ನೆಯದು

೧. ಪ ಮತ್ತು ಬ ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ. ವಿ. ಅ ಮತ್ತು
 ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಕ ಗಳದ್ದು $ಪ + ಬ = ಅ + ಕ$ ಇದ್ದರೆ,
 $ಪ^೨ + ಬ^೨ = ಅ^೨ + ಕ^೨$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೨. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

$$(ಆ) ೧೫ಯ^೨ - ೨೭ಯ + ೧೩ಯ + ೪.$$

೮. ಅರ್ಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{\text{ಕ್ಷ}}{೨} + \frac{\text{ಯ}}{೩} = ೯; \quad \frac{\text{ಕ್ಷ}}{೮} + \frac{\text{ಯ}}{೫} = ೪.$$

ಪತ್ರಿಕೆ ೬ ನೆಯದು.

೧. ಯ^೩—೯ಯ^೨—೧೨ಯ+೧೬೦ ಇದಕ್ಕೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೨. ಯ^೩—೮ಯ^೩—೮ಯ^೨—೮ಯ—೨೮೪ ಮತ್ತು ೩ಯ^೩—೭೮ಯ^೨+೩೮೪ಯ—೨೮೩ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ಗುಣ ಪೃಥಕ್ ರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) ೪ಯ^೩—೧೧ಯ^೨—ಯ+೧೪.

(ಆ) ೮ಯ^೩—೮೩—೨೭೮೩—೧೮ಯ೮೮.

(ಇ) ಯ^೩+೨ಯ೮+೮೩+೩ಯ+೩೮—೪೦.

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) \frac{\text{೫ಯ}—೧}{೬} = \frac{\text{೯೮+೩೮}}{೫} = \frac{\text{೭೯—೭ಯ}}{೧೧}$$

$$(ಆ) \frac{\text{೫}}{\text{ಯ}} - \frac{\text{೩}}{೮} = ೧; \quad \frac{\text{೨೫}}{\text{ಯ}} - \frac{\text{೧೩}}{೮} - ೧೧ = ೦.$$

೫. ದ ಮತ್ತು ನ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಅ ಮತ್ತು

ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಕ ಇದ್ದು ದ—ನ = ಮ೮ — ^ಕಮ ಇದ್ದರೆ

ದ^೩—ನ^೩ = ಮ^೩ಅ^೩ — ^{ಕ^೩}ಮ^೩ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಡಿರಿ.

$$\frac{(\text{ಯ}—ಪ)^{೩೩}$$

$\frac{(\text{ಯ}—ಮ)^{೩ ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.}$

೭. ತಮ್ಮಣ್ಣ ಮತ್ತು ನಾನಪ್ಪ ಇವರಿಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನೌಕರಿಯನ್ನು ಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ. ತಮ್ಮಣ್ಣನ ಪ್ರಾರಂಭದ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳವು ೧೦೦ ರೂ. ಇದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೧೦ ರೂ. ಬಡತಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ನಾನಪ್ಪನ ಪ್ರಾರಂಭದ ಸಂಬಳವು ೧೫೦ ರೂ. ಇದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೫ ರೂ. ಬಡತಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಅವರ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ (ವ) ಮತ್ತು ನೌಕರಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವಾದ ವರ್ಷಗಳು (ಕ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಸಂಬಳಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ವರ್ಷ ಅವರಿಬ್ಬರ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳವು ಅಕ್ಷೇ ಇರುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಜಿಲ್ಲೆಗೆ ೩ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿ ೨೦ ಮಿ. ಗಳ ವರೆಗೆ ನಿಂತು ತಿರುಗಿ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭದ ಕೆಲವು ಅಂತರವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೧೫ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ವಸ್ತುವಿನಿಂದ ಬರುತ್ತಾನೆ. ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅರ್ಧ ಮೈಲನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೨ ಮೈಲಿನಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಬರುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ತಿರುಗಿ ಬರುವಾಗ ೯ ಗಂಟೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರಗಳು

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೧.

ଜି. ଡି. ଡି.

೧. ಏಸೆ. ೨. ತಲಯೆ. ೩. ಏಮೆ. ೪. ಉಕ್ಕಿ-ತುಕ್ಕು+
 ೧೨ಘೆ. ೫. ತಲಕ್ಕಿ. ೬. ತಲೆ. ೭. ೧೧೧೬. ೮. ೩೩೩. ೯. ೧೦೬.
 ೧೦. ೧. ೧೧ ಖ. ೧೨. ೨೬:೧೭. ೪೭. ೧೮. ೬೬. ೧೯. ೧೬. ೨೦. ೮.

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೨.

ಪು. ೧೧, ೧೨.

[illegible]

ಶ್ರೀಶೈಲಸಂಗ್ರಹ ೩.

ସଂ. ୦୫, ୦୯.

[illegible]

$$\text{ഉജ. } \frac{4}{കു} + \frac{7}{നൂ} + \frac{23}{മു} - \frac{10}{കു} - \frac{10}{കു} + \frac{50}{11മു}$$
$$0\text{E. } \frac{20}{10000} + \frac{1}{10000} + \frac{48}{10000} - \frac{20}{10000} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 0.2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} + \dots$$
[illegible]

ಚಗ್ಗನು - $\frac{1}{2}$ ರಿಂದ $\frac{1}{3}$ ವರೆಗೆ - 0.5, 0.5 - 0.5 + $\frac{1}{2}$ ಮು.

೨೦. ಅಕ್ಕಿ + ಅಕ್ಕಿ - ೨. ೨೦. ಅಯ್ಯ - ೨ಯರೆ + ೨ರೆ.

ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ತಿರಸ್ಕೃತ ಸ್ಥಳಗಳು:— ೨೨. — ೨೩. ೨೪. ೨೫.—೨೬.

94. — இவ்-இனம். ௨௫. ௨௧+௩. ௨௨. ௦. ௨௪. ௩. ௨௨. ௨௨.

ಉ. ತಳ—ಗಿತ್ತೆಜ್ಜೆ + ಇತ್ತೆಜ್ಜೆ — ಗಿತ್ತೆಜ್ಜೆ + ಉಜ್ಜೆ.

೨೯. ೬೫೫ + ೧೦೦೫ + ೬೦೦೫ + ೧೬೦೫ + ೧೬೫.

$$2. \text{ ಯು} - \text{ಯು} + 2 = \frac{4}{\text{ಯು}} + \frac{0}{\text{ಯು}}$$

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೪.

ಪು. ೧೮, ೧೯.

೧. ೧೭. ೨. ೨೨. ೩. ೧೪. ೪. ೪೫. ೫. ೧೧. ೬. ೧. ೭. ೧೨೩.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೫.

५३. ३०.

೧. ತಿ + ದಿ + ಧಿ + ಸಿ - ತಿವಿ + ತಿವಿ - ತಿವಿ - ತಿವಿ - ತಿವಿ -
 ತಿವಿ. ೨. ಕಿ + ಒ + ಧಿ + ಮಿ - ತಿವಿ - ತಿವಿ -
 ತಿವಿ + ತಿವಿ + ತಿವಿ. ೩. ತಿವಿ - ತಿವಿ + ತಿವಿ - ತಿವಿ +
 ತಿವಿ + ತಿವಿ + ತಿವಿ - ತಿವಿ + ತಿವಿ. ೪. ತಿವಿ + ತಿವಿ +
 ತಿವಿ + ತಿವಿ + ತಿವಿ - ತಿವಿ + ತಿವಿ. ೫. ತಿವಿ + ತಿವಿ +

-ಅ. - ಗಾಯನ - ೬ರೂ + ೩ರೂ - ಗಾಯನ + ೨ರೂ - ೬ರೂ + ೧ರೂ.

ಜಿ. ಪಠ - ಓಪಮಾ + ಗಣಪಮಾ - ಅಂಪಮಾ + ಗಣಪಮಾ -
 ಓಪಮಾ + ಮಠ. ೬. ಓಳಯಠ - ಗಣಯಠ + ಅಂಯಠ +
 ಗಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ + ರಠ. ೭. ತಠ - ಗಣತಠ +
 ಗಣತಠನಠ - ಗಣತಠನಠ + ಗಣತಠನಠ - ಗಣತಠನಠ + ೭೯ನಠ.
 ಉ. ಓಳಯಠ + ೭೯ಗಣಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ +
 ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ - ಓಳಯಠ. ೯. ಓಳಯಠ - ಗಣಯಠ +
 ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ - ೭೯ಗಣಯಠ + ೭೯ನಠ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೬.

ಪು. ೨೪.

೧. ಗಣಯಠ - ರಠ + ಗಣಯಠ - ೭೯ನಠ. ೨. ಅಂಯಠ - ಓಳಯಠ
 + ಅಂಯಠ - ೭೯ನಠ. ೩. ಅಂಯಠ - ೭೯ಗಣಯಠ + ೭೯ನಠ - ೭೯ನಠ.

೪. ಅಂಯಠ - ೭೯ಗಣಯಠ + ೭೯ನಠ - ೭೯ನಠ. ೫. ಅಂಯಠ +
 ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ.

೬. ಗಣಯಠ - ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ - ಅಂಯಠ
 + ಅಂಯಠ - ೭೯ನಠ. ೭. ಅಂಯಠ - ೭೯ಗಣಯಠ + ೭೯ನಠ - ೭೯ನಠ -
 ೭೯ನಠ + ಗಣಯಠ. ೮. ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ + ೭೯ನಠ -
 ೭೯ನಠ. ೯. ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ + ೭೯ನಠ - ೭೯ನಠ.
 ೧೦. ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ - ೭೯ನಠ. ೧೧. ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ - ೭೯ನಠ.
 ೧೨. ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ - ೭೯ನಠ. ೧೩. ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ - ೭೯ನಠ.
 ೧೪. ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ - ೭೯ನಠ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೭.

ಪು. ೨೫, ೨೬.

೧. ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ೭೯ನಠ. ೨. ಗಣಯಠ - ಗಣಯಠ +
 ಗಣಯಠ - ೭೯ನಠ. ೩. ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ + ಗಣಯಠ + ೭೯ನಠ. ೪.
 ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ + ೭೯ನಠ +
 ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ೭೯ನಠ. ೫. ಅಂಯಠ - ಅಂಯಠ -
 ಅಂಯಠ - ೭೯ನಠ - ೭೯ನಠ - ೭೯ನಠ - ೭೯ನಠ - ೭೯ನಠ - ೭೯ನಠ -
 ೭೯ನಠ + ಅಂಯಠ. ೬. ಗಣಯಠ - ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ - ಗಣಯಠ +
 ಅಂಯಠ + ೭೯ನಠ - ಗಣಯಠ + ಗಣಯಠ + ಅಂಯಠ - ಗಣಯಠ -
 ಗಣಯಠ. ೭. ಪಠ - ಅಂಯಠ + ಗಣಯಠ - ೭೯ನಠ. ೮. ಪಠ + ಅಂಯಠ +
 ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ೭೯ನಠ. ೯. ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ
 - ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ಅಂಯಠ + ೭೯ನಠ.

ಧಮನಕ—ನಳಿ. ೧೧. —ನಳಿ—ಧನಸಾಮ—ಧನಮಾ—ಮಳಿ. ೧೨. —
 ಲನಳಿ—ಲಳನಾಮ—ಲಳನಮಾ—ಲಳನಮಳಿ. ೧೩. ಲರಳಿ + ಲರಳಸ +
 ಲರಳಸ + ಲನಳಿ. ೧೪. ಲಳಿ — ೧೨೦೮ + ೬೦೦೮ — ೧೦೦೦. ೧೫. ಧಿ.
 ೧೬. ಧಿ. ೧೭. —೧. ೧೮. —೨. ೧೯. ೨೦. —೨೧. ೨೨. ೨೩. ೨೪. ೨೫. ೨೬. ೨೭. ೨೮. —೨೯.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ಲ.

ಪ್ರ. ೩೩, ೩೪.

[illegible]

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೯.

ಪು. ೩೮, ೩೯.

[illegible]

೧೬. (ಅತ-ಇದ+೩ನ-೪)(ಅತ-ಇದ-೩ನ÷೪).

೧೭. (ಇತ+ಇಕ-೪ಗ)(ಇತ-ಕ+೪ಗ). ೧೮. (ಅಪ+ಬ+ಮ)
(ಅಪ+ಬ-ಮ)(ಅಪ-ಬ+ಮ)(ಬ+ಮ-ಅಪ). ೧೯.

(ಅಯ-ಅರ+೪)(ಅಯ+ಅರ-೪). ೨೦. (೪ಯ+೭)(೪ಯ+೯).

೨೧. (೩ಪ-೧)(೭ಪ+೨). ೨೨. ಅ(ಅತ-ಕ)(ಅತ+ಕ)(ಅತ+೩ಕ)
(೩ಕ-ಅತ). ೨೩. ಅ(ಅಯ-೩ರ)(೧೨ಯ-೧೨ರ+೧)

(೧೨ಯ-೧೨ರ-೧). ೨೪. (೪ತ+೩)(೪ತ+೧)(೪ತ-೧).

೨೫. (ನ+೧)(೨ನ-೧)².

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೦.

ಪು. ೪೧, ೪೨.

೧. (ಇಕ-೪)(ಇಕ-೧)(ಇಕ+೨). ೨. (೨-ಪ)(೨-೩ಪ)(೨-೪ಪ).

೩. (ಕ-೪)(ಕ-೨)(ಕ+೩). ೪. (ನ-೬)(ನ-೫)(ನ-೩). ೫. (೪ಯ+೩)

(೪ಯ+೧)(೪ಯ+೭). ೬. (ಅರ-೧)(೩ರ-೧)(೪ರ-೧). ೭. (ರ+೪)

(ರ-೪)². ೮. (೩ತ+೪)(೩ತ-೨)². ೯. (ಮ-೩)(ಮ+೪)(ಮ+೧೨).

೧೦. (೪+೩)(೪-೬)². ೧೧. (ಅಪ+೩)(೪ಪ-೨ಪ+೩). ೧೨.

(೩ಪ-೨)(೩ಪ+೪)². ೧೩. ೩ಕ(೩ತ+ಕ²). ೧೪. (೪+ಕ)(೩ತ-೩ತಕ+೭ಕ²).

೧೫. ಅ(೩ಪ+ನ)(೯ಪ+೬ಪನ+೧೩ನ²). ೧೬.

೩(ಯ+೪)(೩ಯ+ಯರ+೪). ೧೭. (ಅರ-೩ಪ)(ಅರ+೩ಪ)

(೪ರ+೬ರಪ+೯ಪ²)(೪ರ-೬ರಪ+೯ಪ²). ೧೮. (ಅ-ಕ)(೪+ಕ)

(೪+ಕ²)(೪-೪ಕ+ಕ²)(೪+೪ಕ+ಕ²)(೪-೪ಕ+ಕ²).

೧೯. ಪೌಮ²(೭ಪ-೪ಮ)(೪ಪೌ+೨ಪಮ+೧೩ಮ²). ೨೦.

(೪ತ-೫ಕ²)(೬೪ತ+೪೦ತಕ²+೨೫ಕ²). ೨೧. ಪ(ಪ+೬)

(ಪ+೩ಪ+೯)(ಪ+೯ಪ+೨೭). ೨೨. ನ(ನ-೧)²(ನ+೧)

(ನ+ನ+೨). ೨೩. ೦. ೨೪. ೦.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೧.

ಪು. ೪೫.

೧ (೪+೪)(೪+೭)(೪+೧೪+೨೦). ೨. (ವ-೫)²

(ವ-೧೦ವ+೧೨). ೩. (ಪ-೩)(ಪ+೬)(ಪ+೩ಪ-೩೦

೪. (ಪ+೨)(ಪ+೩)(ಪ+೫ಪ-೧೨). ೫. (೧-೧)೩೧೬

(೩ಗಂ-೨ಗಂ-೪). ೬. ೩೨(ಯಂ+ಯಂ-೧)(೪ಯಂ+೪ಯಂ-೫).
 ೭. (ಯಂ-೨)(ಯಂ+೫ನಂ)(ಯಂ+೪ನಯಂ-೬ನಂ). ೮.
 ೮(೨ರಂ-೧೦ನಂ+೫ನಂ)(೨ರಂ-೫ನಂ+೫ನಂ). ೯. ೩(೩ರಂ-೩ಕರಂ-೫ಕಂ)
 (೨ರಂ-೯ಕರಂ+೫ಕಂ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೨.

ಪು. ೪೮, ೪೯.

೧. (೨+೨-೧)(೨+೨+೧-೨+೨+೧+೧). ೨.
 (೨ ೨ ೨)(೨+೨+೨+೨-೨+೨). ೩. (ಯಂ+೨ರಂ+೨)
 (ಯಂ+೪ರಂ+೨-೨ಯಂ-೨ರಂ-೨ಯಂ). ೪. (೨ಯಂ+೩ರಂ+೫)
 (೪ಯಂ+೨ರಂ+೨ಯಂ-೨ಯಂ-೧೫ರಂ-೧೦೨ಯಂ). ೫.
 (೪೨-೨+೨೫)೧೬೨+೨+೪೨+೪೨೨+೨೨೨-೨೨೨). ೬.
 (೫೨-೨೧-೫)(೨೫೨+೪೧೨+೫೨+೧೦೨-೨೧೨+೫೨೨).
 ೭. (೨೨+೩೨-೧)(೪೨-೨೨೨+೨೨೨+೨೨+೨೨+೧). ೮.
 (೪೨-೫೨-೨)(೧೬೨+೨೨೨+೨೫೨+೨೨-೧೦೨+೪). ೯.
 (೨೨+೨೨-೪)(೪೨-೨೨+೧೨೨+೧೨೨+೧೨೨+೧೨). ೧೦.
 (ಯಂ-೨ಯಂ+೫)(ಯಂ+೨ಯಂ-ಯಂ+೧೦ಯಂ+೨). ೧೧.
 (ಯಂ-೨+೨೨)(ಯಂ+೨+೨೨+೨೨+೨೨+೨೨+೨೨). ೧೨.
 (೨೨-೨೨+೨೨)(೪೨+೨೨+೨೨+೨೨+೨೨+೨೨+೨೨).

೧೩. $\left(\frac{೨}{೨} - ೨ + \frac{೧}{೨} \right) \left(\frac{೨}{೨} + ೨ \frac{೨}{೨} + ೨ + \frac{೨}{೨} + \frac{೧}{೨} \right)$.

೧೪. $\left(\frac{೨}{೨} + ೫ + \frac{೨}{೨} \right) \left(\frac{೨}{೨} - ೫ \frac{೨}{೨} + ೨ - \frac{೧೦}{೨} + \frac{೪}{೨} \right)$.

೧೫. $\left(\frac{೨೨}{೨} - ೨ - \frac{೨}{೨} \right) \left(\frac{೪೨}{೨} + ೪ \frac{೨}{೨} + ೧ - \frac{೬}{೨} + \frac{೯}{೨} \right)$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೩.

ಪು ೫೩.

೧. ೧. ೨. ೫೧. ೩. - ೨೬೮. ೪. ೨೫೨. ೫. ೧೫೧. ೬. ೨೬.
 ೭. - ೧೫೪. ೮. ೬. ೯. ೧೫೪. ೧೦. - ೨೩೩.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೪.

ಪು. ೫೭.

೧. (ಯ+೨)(ಯ-೬)(ಯ-೪). ೨. (ವ-೩)(೨ವ-೩)(೨ವ+೧).
 ೩. (ಕ್ಷ-೩)(ಕ್ಷ-೨)(೩ಕ್ಷ-೧). ೪. ೨೦; (ವ-೪)(ವ-೫)(ವ+೬).
 ೫. -೪; (ಯ+೪)(ಯ+೩)(ಯ-೨). ೬. ೧೫; (ರ-೫)(೨ರ+೧)
 (೨ರ+೫). ೭. -೧೦೪. ೮. ೦. ೯. -೨೭, -೨೨. ೧೦. ೯
 -೧೨. ೧೧. -೧, ೧೩. ೧೨. ೨, -೨೩.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

ಪು. ೬೪, ೬೫.

೧. (ರ-೧)(ರ-೫)(ರ+೨). ೨. (ಲ+೧)(ಲ+೫)(ಲ+೭).
 ೩. (ಅ-೧)(೨ಅ+೫)(೩ಅ-೨). ೪. (ಪ+೧)(೩ಪ-೧)(೪ಪ+೫).
 ೫. (ರ-೧)²(೪ರ+೧). ೬. (ರ+೧)²(೬ರ+೭). ೭. (ಕ್ಷ-೧)
 (ಕ್ಷ+೧)(ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ+೫). ೮. (ಅ-೧)²(೫ಅ-೪)(೫ಅ+೪).
 ೯. (ಯ-೧)(ಯ+೧)(೩ಯ-೧)(೫ಯ+೪). ೧೦. (ಅ-೧)²
 (೨ಅ-೧)(೩ಅ+೧೦). ೧೧. (ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ+೧)(೩ಕ್ಷ-೨)². ೧೨.
 (ಕ್ಷ+೪)(ಕ್ಷ-೫)². ೧೩. (ಯ-೧)(ಯ-೨)(ಯ-೩)(ಯ-೪).
 ೧೪. (ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ-೩)(ಕ್ಷ-೫). ೧೫. (೨ನ-೧)(ನ+೩)².
 ೧೬. (ಯ-೩)(೨ಯ+೩)². ೧೭. (ನ+೫)(೨ನ-೫)².
 ೧೮. (ಕ್ಷ-೨)(ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೧)(೩ಕ್ಷ-೨). ೧೯. ೭, -೧೨.
 ೨೦. ೧೭, -೨. ೨೧. ೬, ೨. ೨೨. ೬, ೨೪. ೨೩. ೩, -೩.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೬.

ಪು. ೭೫.

೧. (ಯ-ರ)(ರ-೪)(ಯ-೪). ೨. (ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)
 ಮ+ಪ. ೩. (ತ-ದ)(ದ-ನ)(ನ-ತ). ೪. (ಪ-ಮ)(ಯ-ಪ)
 ಮ-ಮ. ೫. (ಯ+ರ)(ರ+೪)(ಲ+ಯ). ೬. (ಪ+ಬ)
 ಮ+ಮ(ಮ+ಪ). ೭. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)(ಪ+ಬ+ಮ).
 ೮. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಪ-ಮ)(ಪ+ಬ+ಮ). ೯. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)
 -ಮ(ಪ+ಬ+ಮ). ೧೦. (ಯ+ರ)(ರ-೪)(ಯ-೪)
 ಮ+ರ+೪+೪+ಯರ+ರಲ+ಲಯ. ೧೧. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)
 ಮ-ಪ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ). ೧೨. ೩ಯರಲ(ಯ-ರ)(ರ-೪)

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೯.

ಪು. ೮೭.

೧. (ಸ+೫)(ಸ+೧೦):(ಸ-೩)(ಸ+೫)(ಸ+೧೦). ೨. (ಮ-೨):
 (ಮ-೬)(ಮ-೩)(ಮ-೨)(ಮ+೪)(ಮ+೫). ೩. (ಸ+೪)(ಸ+೬):
 (ಸ-೧)(ಸ+೨)(ಸ+೪)(ಸ+೬). ೪. (ಯ-೫)(ಯ-೭):
 (ಯ-೬)(ಯ-೫)(೨ಯ+೧)(೩ಯ-೧). ೫. (ಪ-೨): (ಪ-೨)
 (ಪ-೨): (ಪ-೨)(೩ಪ-೧)(೩ಪ-೧)(೪ಪ+೧)
 (೫ಪ-೪). ೬. (ರ+೨ರ-೨): (೨ರ-೬)(೨ರ-೪)(೨ರ+೨ರ-೨).
 ೭. (೨ಯ+೩): (೨ಯ+೩)(೨ಯ+೩)(೨ಯ+೩)(೨ಯ+೩).
 ೮. (೨ಮ+೩): (೨ಮ-೫)(೨ಮ+೧)(೨ಮ+೩)(೨ಮ+೩).
 ೧೦. (೩ಸ+೧): (೩ಸ+೧)(೩ಸ+೧)(೩ಸ+೧)(೩ಸ+೧).
 ೧೧. (ಪ+೨)(೩ಪ+೧): (ಪ+೧)(ಪ+೨)(೩ಪ-೧)(೩ಪ-೧).
 ೧೨. (ಯ-೫)(೨ಯ+೧): (ಯ-೫)(ಯ-೧)(೨ಯ+೧)(೩ಯ-೨).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

ಪು. ೯೯, ೧೦೦.

೧. (ಪ+೫):(ಪ+೫)(ಪ+೨)(ಪ-೩)(ಪ-೬)(೨ಪ-೧). ೨. (೨ಪ-೩):
 (೨ಪ-೧):(೨ಪ-೩)(೨ಪ-೧)(೨ಪ-೧)(೨ಪ+೫). ೩. (೫ಪ-೨):
 (೫ಪ-೪)(೫ಪ+೩)(೫ಪ+೩)(೫ಪ+೩). ೪. (೨ಯ+೨ಯ): (ಯ-೬)
 (ಯ-೪)(ಯ-೬)(ಯ-೨)(೨ಯ+೨ಯ). ೫. (ಪ-೪)(ಪ-೨)
 (ಪ+೩): (ಪ-೪)(ಪ-೨)(ಪ+೩)(೪ಪ+೩)(೫ಪ-೨). ೬. (೫ಪ-೨)
 -೫ಪ-೧)(೬ಪ-೪). ೭. (೨ಯ-೨ಯ-೨): (೨ಯ-೨ಯ+೨ಯ):
 (೨ಯ-೩ಯ-೧೦). ೮. (೯ಸ+೨ಸ-೨): (೯ಸ-೯ಸ+೨): (೯ಸ-೧).
 ೯. (೨೦ಸ+೨೫ಸ-೨೫): (೨೦ಸ-೨೫ಸ+೨೫): (೨೦ಸ-೧).
 ೧೦. (೨ಯ-೪ಯ+೪ಯ+೨ಯ): (೨ಯ-೪ಯ-೨ಯ+೨ಯ):
 (೨ಯ-೨ಯ-೨ಯ+೨ಯ). ೧೧. ೨, ೨೪. ೧೨. ---೧೬.
 ೧೩. ೨, ೬.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೧.

ಪು. ೧೦೩, ೧೦೪.

ಯ+೨ಪ. ೨. ಪ. ೩. ಪ+೪. ೪. ಅ-ಮ.
 ಯ+೪ಪ. ೨. ಪ. ೩. ಪ+೪. ೪. ಅ-ಮ+ಮ.

೫. $\frac{ಅಪ-೭ಮ}{೩ಪ+ಮ}$ ೬. $\frac{ಬಹ+೫ಕ}{೨(ಅ-೨ಕ)}$ ೭. $\frac{೨ಯ-೭}{೪ಯ-೧}$
೮. $\frac{೨(೫ಕ್ಷ-೨)}{೨ಕ್ಷ+೫}$ ೯. $\frac{ಯ+೨}{ಯ+೬}$ ೧೦. $\frac{ಪ-೧}{ಪ+೨}$
೧೧. $\frac{ಯ+೨}{೪ಯ-೭ಯ+೧}$ ೧೨. $\frac{ನ+೩}{ನ+೫}$ ೧೩. $\frac{ಮ+೪}{ಮ+೨ಮ-೧೫}$
೧೪. $\frac{ಮ+೨ಮ-೮}{ಮ-೨ಮ-೮}$ ೧೫. $\frac{ಯ-೮}{ಯ+೮}$ ೧೬. $\frac{ಪ+೧೬ಮ}{೨ಪ+ಮ}$
೧೭. $\frac{೪(ಯ+೪ಯ+೩)}{೨ಯ+೨ಯ-೫}$ ೧೮. $\frac{ಅ-೪ಕ}{ಅ+೪ಕ}$
೧೯. $\frac{೫ಹ+೩ಕ+೨ಗ}{೫ಹ+೩ಕ-೨ಗ}$ ೨೦. $\frac{(ಅ-೧)(ಅ-೩)}{(ಅ+೧)(ಅ+೩)}$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨.

ಪು. ೧೦೮-೧೧೦.

೧. $\frac{ಅ+ಅಮ+ಮ}{ಅ-ಅಮ+ಮ}$ ೨. $\frac{೫}{೮}$ ೩. $\frac{೨ಕ್ಷ+೩}{೩ಕ್ಷ+೨}$
೪. ೧. ೫. $\frac{೪(ಅ+ಅನ+ನ)}{೧೫}$ ೬. ೧. ೭. $\frac{೪(೫ಯ-೨)}{೩(ಯ-೩)}$
೮. $\frac{೨(ಯ+ಕ್ಷ)}{೩ಯ-ಕ್ಷ}$ ೯. $\frac{೫ಹ-ಕ}{೨ಹ-ಕ}$ ೧೦. $\frac{(ಮ-೨)(ಮ+೪)}{(ಮ+೫)(ಮ+೭)}$
೧೧. $\frac{ನ-೧}{ನ-೨}$ ೧೨. $\frac{ಅ+೧}{ಅ+೭}$ ೧೩. $\frac{೨ಪ+ಮ}{೪ಪ-೨ಪಮ+ಮ}$
೧೪. ೧. ೧೫. $\frac{೩ಯ-೧}{೧೬ಪ-೪ಪ+೧}$ ೧೬. $\frac{೧೬ಪ-೪ಪ+೧}{ಪ-೫ಪ+೨೫}$ ೧೭. ೨.
೧೮. $\frac{೮+೮೮+೮}{೪}$ ೧೯. ೨. ೨೦. $\frac{ಯ+ಪ}{ಯ-ಮಯ+ಮ}$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೩.

ಪು. ೧೧೩, ೧೧೪.

ಮುದ್ರಣದ ಅನುಕೂಲತೆಗಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸಾಧಾರಣ ಭೇದವನ್ನು
ರಾಯ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೊಸ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

೧. ಅ—ಕ; ೨(ಅ+ಕ), ೨(ಅ—ಕ). ೨. (೨ಅ+೩ಕ) (೨ಅ-೩ಕ);
 ೫(೩ಅ—೨ಕ), ೭(೨ಅ+೩ಕ). ೩. ಅ(ಅ—ಗ) (೨ಅ+೩ಗ);
 ೭(೨ಅ+೩ಗ), ೩(ಅ—ಗ). ೪. ೧೨(ಯ+೩ರ); ೪ನ, ೯ನ,
 ೫. (ಯ—೨)(ಯ—೩)(ಯ—೪); ೨(ಯ—೩), ೩(ಯ—೨). ೬. (ರ-೫)
 (ರ+೭)(೨ರ+೧); ೩(ರ+೭), ೨೩(ರ-೫). ೭. (೨ಯ-೩ರ)(೩ಯ+೪ರ)
 (೫ಯ—೨ರ); ೫ನ(೫ಯ—೨ರ), ೪ನ(೨ಯ—೩ರ). ೮. (ಅ+೪)
 (ಅ+೨)(ಅ-೫); ಅ-೫, ೪(ಅ+೨), ೨(ಅ+೪). ೯. (ಅ—ಕ)೨;
 ಅ—ಕ೨, (ಅ+ಕ)೨, (ಅ—ಕ)೨. ೧೦. ಯ-ರ; ಯ೨+ರ೨, ಯ-ರ೨,
 ಯ೨+ಯ೨ರ+ರ೨, ಯ-ರ೨. ೧೧. (ಯ—ರ)(ರ—೪)
 (೪—ಯ); ೪-ಯ, ೨(ಯ—ರ), ೩(ರ—೪). ೧೨. (೪ಯ—೨೫ರ)
 (೪೫ಯ—೧೬ರ); ೩೩(೪೫ಯ—೧೬ರ), ೨೨(೪ಯ—೨೫ರ),
 ೫(೨ಯ+೫ರ)೭ಯ-೪ರ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೪.

ಪು. ೧೨೨—೧೨೪.

೧. $\frac{\text{ಅಮ}}{\text{ಪಮ}}$ ೨. $\frac{\text{ಅಅಕ}}{\text{ಅ—ಕ೨}}$ ೩. ಅ.
೪. $\frac{\text{ಅ+ಕ—೨೩ಕ}}{\text{ಅಕ}}$ ೫. $\frac{\text{ಅ೪+ಕ೪+ಅಕ೨}}{\text{ಅಕ೨}}$
೬. $\frac{\text{ಅಪ}}{\text{ಪ—ಮ}}$ ೭. $\frac{\text{೨ಕಮ}}{(\text{ಪ—ಮ})^೨(\text{ಪ+ಮ})}$ ೮. $\frac{\text{೪ದನ}}{\text{ದ—ನ}}$
೯. $\frac{\text{ಯ+೨೫}}{\text{ಯ-೧೨೫}}$ ೧೦. $\frac{\text{೨ಪ೪}}{\text{ಪ೪+ಪ೨ಮ೨+ಮ೪}}$
೧೧. $\frac{\text{೨ಅ—೧೨ಅ+೧೯}}{(\text{ಅ—೨})(\text{ಅ—೩})}$ ೧೨. $\frac{\text{೩}}{(\text{ಅ+೩})(\text{ಅ+೪})(\text{ಅ+೫})}$
೧೩. $\frac{\text{೨(೯ಯ+೧೬)}}{\text{೮೧ಯ೨+೧೪೪ಯ೨+೨೫೬}}$ ೧೪. $\frac{\text{ರ೨+೪೨}}{\text{ರ—೪೨}}$
೧೫. $\frac{\text{೧೦ಮ}}{(\text{೨ಪ+೫ಮ})^೨}$ ೧೬. $\frac{\text{೨(೩ನ+೧)}}{(\text{ನ—೧})(\text{ನ+೨})(\text{ನ+೩})}$

೧೭. $\frac{\text{ಪಮ}}{(\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}^2-\text{ಸ}^2\text{ಮ}^2+\text{ಮ}^2)}$ ೧೮. $\frac{\text{ಗಚ}}{(\text{ಅ}+\text{ಗ})^2}$

೧೯. $\frac{\text{ಪಮ}-\text{ಪ}^2+\text{ಪ}^2\text{ಮ}}{\text{ಪ}^2-\text{ಸ}^2\text{ಮ}^2+\text{ಗಚಪಮ}+\text{ಪ}^2}$ ೨೦. $\frac{\text{ಪ}^2}{\text{ಪ}^2-\text{ಗಚ}}$

೨೧. $\frac{\text{ಪ}^2}{(\text{ಪ}+\text{ಪ})^2}$ ೨೨. $\frac{\text{ಪಮ}(\text{ಪ}^2+\text{ಮ}^2)}{\text{ಪ}^2-\text{ಮ}^2}$ ೨೩. $\frac{\text{ಗ}}{\text{ಅ}+\text{ಗ}}$

೨೪. $\frac{\text{ಗ}}{\text{ಮ}^2-\text{ಪ}^2\text{ಮ}+\text{ಪ}}$ ೨೫. $\frac{\text{ಅಪ}^2+\text{ಪಮ}^2}{\text{ಅಪ}^2-\text{ಪಮ}^2}$

೨೬. $\frac{\text{ಪ}}{(\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ})}$ ೨೭. ೦. ೨೮. ೦.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨೫. ಪು ೧೨೬, ೧೨೭.

೧. $\frac{\text{ಅಪ}^2}{\text{ಪ}^2-\text{ಗಚ}}$ ೨. $\frac{\text{ಗಚಪ}}{\text{ಪ}^2-\text{ಮ}^2}$ ೩. $\frac{\text{ಗ}}{\text{ಗಚಮ}^2-\text{ಗ}}$

೪. $\frac{\text{ಅಪ}^2\text{ಕ}^2}{\text{ಅ}^2-\text{ಕ}^2}$ ೫. $\frac{\text{ಪ}+\text{ಪ}}{\text{ಪ}+\text{ಪ}}$ ೬. $\frac{\text{ಪನ}-\text{ಪ}}{\text{ನ}(\text{ನ}-\text{ಪ})}$ ೭. $\frac{\text{ಮ}+\text{ಪ}}{(\text{ಮ}-\text{ಪ})^2}$

೮. $\frac{\text{ಪಮ}^2}{\text{ಪ}^2-\text{ಮ}^2}$ ೯. $\frac{\text{ಅಮ}^2(\text{ಅನ}^2+\text{ಮ}^2)}{\text{ನ}^2-\text{ಮ}^2}$

೧೦. $\frac{\text{ಗಚ}}{-(\text{ಯ}^2+\text{ಗ})(\text{ಯ}^2-\text{ಅಗ})}$ ೧೧. $\frac{\text{ಗ}}{(\text{ಅ}+\text{ಗ})(\text{ಅ}+\text{ಅ})(\text{ಅ}+\text{ಅ})}$

೧೨. $\frac{\text{ಅ}}{(\text{ಅಪ}+\text{ಗ})(\text{ಅಪ}+\text{ಅ})(\text{ಅಪ}+\text{ಗ})}$ ೧೩. $\frac{\text{ಅಪ್ಪ}^2}{\text{ಪ್ಪ}^2-\text{ಗ}}$

೧೪. $\frac{\text{ಅ}}{\text{ಅಗಚಯ}^2-\text{ಗ}}$ ೧೫. $\frac{\text{ಅ}}{(\text{ಅ}+\text{ಗ})(\text{ಅ}+\text{ಅ})(\text{ಅ}\times\text{ಗ})(\text{ಅ}+\text{ಅ})}$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨೬. ಪು. ೧೨೯, ೧೩೦

೧. $\frac{(\text{ಯ}+\text{ಅ})}{(\text{ಯ}+\text{ಅ})(\text{ಯ}+\text{ಗ})}$ ೨. $\frac{\text{ಗಚ}}{(\text{ಗ}-\text{ಅ})(\text{ಗಚ}-\text{ಅ})}$

೩. $\frac{\text{ಪ}}{(\text{ಸ}^2-\text{ಗ})(\text{ಪ}^2-\text{ಅ})}$ ೪. $\frac{\text{ಅಚ}}{(\text{ನ}^2-\text{ಅಗ})(\text{ನ}^2-\text{ಅಚ})}$

- ಜಿ. $\frac{\text{ಅಕ್ಷ-೨}}{\text{ಅಕ್ಷ-೨}}$ ಒ. $\frac{\text{೧೨}}{(\text{ಕ್ಷ-೧})(\text{ಕ್ಷ-೨})}$ ಒ. $\frac{\text{೨}}{(\text{ಕ್ಷ-೧})(\text{ಕ್ಷ-೨})}$
೯. $\frac{\text{೨(ನ+ಪ)(ನಪ-ಮ)}}{(\text{ನ-ಮ})(\text{ಪ-ಮ})}$ ೯. $\frac{\text{೨ಕಗ(ಕ-ಗ)}}{(\text{ಕ-ಕ})(\text{ಅ-ಗ})}$
೧೦. $\frac{\text{೬೦}}{(\text{ಯ-೧})(\text{ಯ-೨})(\text{ಯ+೩})(\text{ಯ+೪})}$
೧೧. $\frac{\text{೫೬+೨೧}}{\text{ಕ್ಷ+೬ಕ್ಷ+೨೦}}$ ೧೨. $\frac{\text{೨}}{\text{ಅ-೫ಕ}}$
- ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೭ ಪು. ೧೩೬, ೧೩೭.
೧. $\frac{\text{೧}}{\text{ಪ-ಮ}}$ ೨. $\frac{\text{೨}}{\text{೫ಯ-೨}}$ ೩. $\frac{\text{೧೦}}{\text{೮-೩}}$ ೪. $\frac{\text{೪}}{\text{ಪ-ಮ}}$
- ಜಿ. $\frac{\text{೧}}{(\text{ಪ-೧})(\text{ಪ-೨})}$ ಒ. $\frac{\text{೨ಮ}}{\text{ಪ-ಮ}}$
೭. $\frac{\text{೫ಕ-೩}}{(\text{ಕ+೪})(\text{೨ಕ-೧})(\text{೩ಕ-೨})}$ ೮. $\frac{\text{೧}}{\text{ನ-೨}}$ ೯. $\frac{\text{೧೨ಯ}}{\text{೧-೧೬ಯ}}$
೧೦. $\frac{\text{೯೫}}{(\text{ಕ್ಷ-೪})(\text{ಕ್ಷ-೧೬})}$ ೧೧. $\frac{\text{ಪ}}{(\text{ಪ-ಬ})(\text{ಪ-ಮ})}$
೧೨. ೦. ೧೩. ೧. ೧೪. ೦. ೧೫. ೦. ೧೬. ೦. ೧೭. ೦.
- ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೮. ಪು. ೧೪೧-೧೪೪.
೧. $\frac{\text{೧}}{\text{೮}}$ ೨. $\frac{\text{೨}}{\text{ಯ-೮}}$ ೩. $\frac{\text{ಪ+೨}}{\text{ಪ+೩}}$ ೪. $\frac{\text{೪}}{\text{ಯ+ವ}}$
೫. $\frac{\text{೮+೮+೮}}{\text{೮+೮}}$ ೬. $\frac{\text{ಪ-೨}}{\text{ಪ-೪}}$ ೭. $\frac{\text{೨-೪}}{\text{೨-೪}}$ ೮. $\frac{\text{೨-೪}}{\text{೨-೪}}$
೯. $\frac{\text{೮೩-೮೩}}{\text{೮(೮+೮)}}$ ೯. $\frac{\text{ಯ+೮}}{\text{ಯ-೮}}$ ೧೦. $\frac{\text{ಪ+ಬ+ಮ-ಪಬ-}}{\text{೮(೮+೮)}}$
೧೧. $\frac{\text{ಬಮ-ಮಪ}}{\text{೮೧}}$ ೧೨. $\frac{\text{ಯ+೩}}{\text{ಯ+೫}}$ ೧೩. $\frac{\text{ವ-೩}}{\text{ವ-೫}}$ ೧೪. $\frac{\text{ಯ-೧}}{\text{ಯ+೨}}$

೧೪. $\frac{ಕ}{ಅ+ಕ} \cdot ೧೫. \frac{೧-೭ಯ}{೪(ಕಯ-೧)} \cdot ೧೬. \frac{೭ಕ}{೧-ಅ}$

೧೭. ೨. ೧೭. $\frac{೭}{೮}$ ೧೮. ೧. ೨೦. $\frac{೭೦೦೦೦-೧೦೦೦೦೦೦+೪೦೦೦೦೦೦೦}{೪೦೦೦೦೦೦೦+೪೦೦೦೦೦೦೦}$

೨೦. ೧. ೨೨. $\frac{(೮-೧)(೮-೨)}{೮+೧}$ ೨೩. ೧. ೨೪. ೮೦೦.

೨೫. $೮೦+೪೦+೮೦-೮೦-೪೦=೮೦$ ೨೬.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨೯.

ಪು. ೧೪೬.

೧. $\frac{೭}{೨} \cdot ೨ \cdot ೩ = ೬$ ೨. ೧. ೪. $\frac{೨-೪}{೫}$ ೩. $\frac{೨-೩ಯ}{೨-೪ಯ}$

೪. $\frac{೧-ಯ}{೨-ಯ}$ ೫. $\frac{೭ಕ}{ಅ+೧}$ ೬. $\frac{(೮-೨)^೨}{೮}$ ೭. $\frac{೮+೮}{೮}$

೧೦. $\frac{೪೫-೩}{೧೦}$ ೧೧. $\frac{೮}{೮+೮}$ ೧೨. $\frac{೧೦}{೯-೭}$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೦.

ಪು. ೧೫೩.

೧. $\frac{೧}{೪ಕ} + \frac{೧}{೭ಕ} + \frac{೧}{೭ಕ}$ ೨. $\frac{ಕ೨}{೧೪} + \frac{ಗ೨}{ಕ೪} + \frac{ಘ೨}{೪ಗ}$

೩. $\frac{೫ಯ}{೮} - ೭ + \frac{೮}{೪}$ ೪. $\frac{೧}{೪೦೦೦} + \frac{೧}{೪೦೦೦} +$

$\frac{೧}{೪೦೦೦} - \frac{೩}{೪೦೦೦೦} \cdot ೫. \frac{೧}{೪-೪} + \frac{೧}{೪-೩}$

೬. $\frac{೧}{೨೦-೧} + \frac{೧}{೪೦-೨}$ ೭. $\frac{೧}{೪-೧} + \frac{೧}{೪-೨}$ ೮. $\frac{೧}{೪+೧} +$

$\frac{೧}{೨೪+೫}$ ೯. $\frac{೧}{೮-೨} + \frac{೧}{೮+೨}$ ೧೦. $\frac{೧}{೫೪-೩} + \frac{೧}{೫೪+೩}$

೧೧. $\frac{೧}{೪-೪} + \frac{೧}{೪+೪}$ ೧೨. $\frac{೧}{೭-೩} - \frac{೧}{೭+೩}$

$$೧೩. \frac{೧}{ಯ+೪} - \frac{೧}{ಯ+೪} \cdot ೧೪. \frac{ಪ+ಮ}{ಪ-ಮ} + \frac{ಪ-ಮ}{ಪ+ಮ}$$

$$೧೫. \frac{೧}{೨-೨೨} \cdot - \frac{೧}{೨+೨೨} \quad ೧೬. \frac{೧}{ಪ-ಮ} + \frac{೧}{ಪ+ಮ}$$

$$೧೭. \frac{ಯ+೩}{ಯ-೩} + \frac{ಯ-೩}{ಯ+೩} \cdot ೧೮. \frac{೧}{ಯ-ಯರ+೨} +$$

$$\frac{೧}{ಯ+ಯರ+೨} \cdot ೧೯. ೧-೨+೨- \frac{೨೩}{೧+೨} \cdot ೨೦. ೧+$$

$$೨+೨+ \frac{೨೩}{೧-೨} \cdot ೨೧. ೧+೨೨+೨೨+ \frac{೨೨೩}{೧-೨} \cdot$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೧.

ಪು. ೧೫೫, ೧೫೬.

೧. ೨(ಯ-೪). ೨. ೩(ಯ+೧). ೩. ೨+೩. ೪. ಪ-ಮ+ಮ. ೫. ೨-೨ಮ+ಮ. ೬. ಯ+ಯವ+ಮ. ೭. ಪ-೫.

$$೮. \frac{ಪ}{(ಪ-ಮ)} \quad ೯. \frac{೨(೨ರ-೫)}{(ರ-೯)(ರ-೨)(ರ-೩)}$$

$$೧೦. \frac{೪(೩ಯ-೨)}{(ಯ-೪)(ಯ-೨)(ಯ+೩)}$$

$$೧೧. \frac{೩ಯ-೨}{(ಯ-೩)(ಯ-೨)(ಯ-೧)} \quad ೧೨. \frac{೨ಮ(೨ಪ+ಮ)}{(ಪ-ಮ)(ಪ+ಮ)}$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಪು. ೧೬೪-೧೬೬.

೧. ೧೮, ೪. ೨. ೭೫, ೯೫. ೩. ೫, ೩. ೪. ೩, ೨. ೫. ೨೫, ೧೫. ೬. ೪೫, ೧೫. ೭. ೫, ೩. ೮. ೫, ೩. ೯. ೧, ೨. ೧೦. ೩೫, ೫೫. ೧೧. ೫, ೪. ೧೨. ೨, ೩. ೧೩. ೨, ೪. ೧೪. ೨, ೧. ೧೫. ೪, ೨. ೧೬. ೪, ೬. ೧೭. ೨, ೨. ೧೮. ೫, ೫. ೧೯. ೧, ೨. ೨೦. ೨, ೧. ೨೧. ೩, ೨. ೨೨. ೧, ೨. ೨೩. ೩, ೧.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೩

ಪು. ೧೭೦, ೧೭೧.

೧. ೩, ೩. ೨. ೫, ೧೫. ೩. ೨೫, ೫೫. ೪. ೧೫, ೨. ೫. ೫, ೫. ೬. ೫, ೫. ೭. ೨, ೩. ೮. ೨, ೩. ೯. ೫, ೫. ೧೦. ೪, ೫.

ନବ. ୨, -୧. ଗଞ୍ଜ. ୨, ୩. ଗଞ୍ଜ. ୩, ୨. ଗଞ୍ଜ. ୩, ୨. ଗଞ୍ଜ. ୩, ୨.

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

ಪ್ರ. ೧೭೩—೧೭೫.

၀. ၁-၀. ၁. ၂-၁. ၂. ၃-၂. ၃. ၄-၃. ၄. ၅-၄. ၅. ၆-၅. ၆. ၇-၆. ၇. ၈-၇. ၈. ၉-၈. ၉. ၁၀-၉. ၁၀. ၁၁-၁၀. ၁၁. ၁၂-၁၁. ၁၂. ၁၃-၁၂. ၁၃. ၁၄-၁၃. ၁၄. ၁၅-၁၄. ၁၅. ၁၆-၁၅. ၁၆. ၁၇-၁၆. ၁၇. ၁၈-၁၇. ၁၈. ၁၉-၁၈. ၁၉. ၂၀-၁၉. ၂၀. ၂၁-၂၀. ၂၁. ၂၂-၂၁. ၂၂. ၂၃-၂၂. ၂၃. ၂၄-၂၃. ၂၄. ၂၅-၂၄. ၂၅. ၂၆-၂၅. ၂၆. ၂၇-၂၆. ၂၇. ၂၈-၂၇. ၂၈. ၂၉-၂၈. ၂၉. ၃၀-၃၀. ၃၀. ၃၁-၃၁. ၃၁. ၃၂-၃၂. ၃၂. ၃၃-၃၃. ၃၃. ၃၄-၃၄. ၃၄. ၃၅-၃၅. ၃၅. ၃၆-၃၆. ၃၆. ၃၇-၃၇. ၃၇. ၃၈-၃၈. ၃၈. ၃၉-၃၉. ၃၉. ၄၀-၄၀. ၄၀. ၄၁-၄၁. ၄၁. ၄၂-၄၂. ၄၂. ၄၃-၄၃. ၄၃. ၄၄-၄၄. ၄၄. ၄၅-၄၅. ၄၅. ၄၆-၄၆. ၄၆. ၄၇-၄၇. ၄၇. ၄၈-၄၈. ၄၈. ၄၉-၄၉. ၄၉. ၅၀-၅၀. ၅၀. ၅၁-၅၁. ၅၁. ၅၂-၅၂. ၅၂. ၅၃-၅၃. ၅၃. ၅၄-၅၄. ၅၄. ၅၅-၅၅. ၅၅. ၅၆-၅၆. ၅၆. ၅၇-၅၇. ၅၇. ၅၈-၅၈. ၅၈. ၅၉-၅၉. ၅၉. ၆၀-၆၀. ၆၀. ၆၁-၆၁. ၆၁. ၆၂-၆၂. ၆၂. ၆၃-၆၃. ၆၃. ၆၄-၆၄. ၆၄. ၆၅-၆၅. ၆၅. ၆၆-၆၆. ၆၆. ၆၇-၆၇. ၆၇. ၆၈-၆၈. ၆၈. ၆၉-၆၉. ၆၉. ၇၀-၇၀. ၇၀. ၇၁-၇၁. ၇၁. ၇၂-၇၂. ၇၂. ၇၃-၇၃. ၇၃. ၇၄-၇၄. ၇၄. ၇၅-၇၅. ၇၅. ၇၆-၇၆. ၇၆. ၇၇-၇၇. ၇၇. ၇၈-၇၈. ၇၈. ၇၉-၇၉. ၇၉. ၈၀-၈၀. ၈၀. ၈၁-၈၁. ၈၁. ၈၂-၈၂. ၈၂. ၈၃-၈၃. ၈၃. ၈၄-၈၄. ၈၄. ၈၅-၈၅. ၈၅. ၈၆-၈၆. ၈၆. ၈၇-၈၇. ၈၇. ၈၈-၈၈. ၈၈. ၈၉-၈၉. ၈၉. ၉၀-၉၀. ၉၀. ၉၁-၉၁. ၉၁. ၉၂-၉၂. ၉၂. ၉၃-၉၃. ၉၃. ၉၄-၉၄. ၉၄. ၉၅-၉၅. ၉၅. ၉၆-၉၆. ၉၆. ၉၇-၉၇. ၉၇. ၉၈-၉၈. ၉၈. ၉၉-၉၉. ၉၉. ၁၀၀-၁၀၀. ၁၀၀. ၁၀၁-၁၀၁. ၁၀၁. ၁၀၂-၁၀၂. ၁၀၂. ၁၀၃-၁၀၃. ၁၀၃. ၁၀၄-၁၀၄. ၁၀၄. ၁၀၅-၁၀၅. ၁၀၅. ၁၀၆-၁၀၆. ၁၀၆. ၁၀၇-၁၀၇. ၁၀၇. ၁၀၈-၁၀၈. ၁၀၈. ၁၀၉-၁၀၉. ၁၀၉. ၁၁၀-၁၁၀. ၁၁၀. ၁၁၁-၁၁၁. ၁၁၁. ၁၁၂-၁၁၂. ၁၁၂. ၁၁၃-၁၁၃. ၁၁၃. ၁၁၄-၁၁၄. ၁၁၄. ၁၁၅-၁၁၅. ၁၁၅. ၁၁၆-၁၁၆. ၁၁၆. ၁၁၇-၁၁၇. ၁၁၇. ၁၁၈-၁၁၈. ၁၁၈. ၁၁၉-၁၁၉. ၁၁၉. ၁၂၀-၁၂၀. ၁၂၀. ၁၂၁-၁၂၁. ၁၂၁. ၁၂၂-၁၂၂. ၁၂၂. ၁၂၃-၁၂၃. ၁၂၃. ၁၂၄-၁၂၄. ၁၂၄. ၁၂၅-၁၂၅. ၁၂၅. ၁၂၆-၁၂၆. ၁၂၆. ၁၂၇-၁၂၇. ၁၂၇. ၁၂၈-၁၂၈. ၁၂၈. ၁၂၉-၁၂၉. ၁၂၉. ၁၃၀-၁၃၀. ၁၃၀. ၁၃၁-၁၃၁. ၁၃၁. ၁၃၂-၁၃၂. ၁၃၂. ၁၃၃-၁၃၃. ၁၃၃. ၁၃၄-၁၃၄. ၁၃၄. ၁၃၅-၁၃၅. ၁၃၅. ၁၃၆-၁၃၆. ၁၃၆. ၁၃၇-၁၃၇. ၁၃၇. ၁၃၈-၁၃၈. ၁၃၈. ၁၃၉-၁၃၉. ၁၃၉. ၁၄၀-၁၄၀. ၁၄၀. ၁၄၁-၁၄၁. ၁၄၁. ၁၄၂-၁၄၂. ၁၄၂. ၁၄၃-၁၄၃. ၁၄၃. ၁၄၄-၁၄၄. ၁၄၄. ၁၄၅-၁၄၅. ၁၄၅. ၁၄၆-၁၄၆. ၁၄၆. ၁၄၇-၁၄၇. ၁၄၇. ၁၄၈-၁၄၈. ၁၄၈. ၁၄၉-၁၄၉. ၁၄၉. ၁၅၀-၁၅၀. ၁၅၀. ၁၅၁-၁၅၁. ၁၅၁. ၁၅၂-၁၅၂. ၁၅၂. ၁၅၃-၁၅၃. ၁၅၃. ၁၅၄-၁၅၄. ၁၅၄. ၁၅၅-၁၅၅. ၁၅၅. ၁၅၆-၁၅၆. ၁၅၆. ၁၅၇-၁၅၇. ၁၅၇. ၁၅၈-၁၅၈. ၁၅၈. ၁၅၉-၁၅၉. ၁၅၉. ၁၆၀-၁၆၀. ၁၆၀. ၁၆၁-၁၆၁. ၁၆၁. ၁၆၂-၁၆၂. ၁၆၂. ၁၆၃-၁၆၃. ၁၆၃. ၁၆၄-၁၆၄. ၁၆၄. ၁၆၅-၁၆၅. ၁၆၅. ၁၆၆-၁၆၆. ၁၆၆. ၁၆၇-၁၆၇. ၁၆၇. ၁၆၈-၁၆၈. ၁၆၈. ၁၆၉-၁၆၉. ၁၆၉. ၁၇၀-၁၇၀. ၁၇၀. ၁၇၁-၁၇၁. ၁၇၁. ၁၇၂-၁၇၂. ၁၇၂. ၁၇၃-၁၇၃. ၁၇၃. ၁၇၄-၁၇၄. ၁၇၄. ၁၇၅-၁၇၅. ၁၇၅. ၁၇၆-၁၇၆. ၁၇၆. ၁၇၇-၁၇၇. ၁၇၇. ၁၇၈-၁၇၈. ၁၇၈. ၁၇၉-၁၇၉. ၁၇၉. ၁၈၀-၁၈၀. ၁၈၀. ၁၈၁-၁၈၁. ၁၈၁. ၁၈၂-၁၈၂. ၁၈၂. ၁၈၃-၁၈၃. ၁၈၃. ၁၈၄-၁၈၄. ၁၈၄. ၁၈၅-၁၈၅. ၁၈၅. ၁၈၆-၁၈၆. ၁၈၆. ၁၈၇-၁၈၇. ၁၈၇. ၁၈၈-၁၈၈. ၁၈၈. ၁၈၉-၁၈၉. ၁၈၉. ၁၉၀-၁၉

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೩೫.

ଶ୍ରୀ ୧୧୫—୧୧୬.

ಗ. ಖಃ. ೨. ಜಿೞಂಂ ರೂ., ಖಂಂಂ ರೂ., ಗಿೞಂಂ ರೂ. ೩. ಗಿೞಂ.
 ಲಂ; ೩|| ರೂ. ೩|| ರೂ. ೪. ಗಿೞಂ ರೂ., ಲಂ ರೂ., ಜಿ. ಲಮೈ.
 ೨ಮೈ., ೬. ೭ ರೂ., ೫ ರೂ. ೭. ೩೨೪. ೮. ಗಂಜಿ ರೂ., ಗಿೞಂ ಕೇರು
 ೯. ಲಂಫೈ, ಖಂಫೈ. ೧೦. ಖಂ, ಖಳ. ೧೧. ೨೧ ರೂ; ೪ರೂ. ೧೩. ಖಲ
 ಜಿ; ೩೮, ೩||೮. ೧೪. ೬೦ವ, ೨೫ವ. ೧೫. ೩. ೧೬. ೨೧ಮೈ, ೪ಮೈ,
 ೩೨ಮೈ ೪೨ಮೈ. ೧೭. ಗಿೞಂ ರೂ., ೨೪ಂ ರೂ. ೧೮. ಜಿ, ಗಿ. ೧೯. ೨೦
 ಗಂರೂ. ೨೦ ಗಳ, ೬. ೨೧. ಗಿಜಿರೇರು. ಗಿಜಿರೇರು. ೨೨. ಜಿ. ೨೩.
 ೯೦ರೂ, ೪೫. ೨೪. ೨೩. ೨೫. ಗಿೞಂ, ಗಿೞಂ. ೨೬. ೨೪. ೨೭. ಕೃಷ್ಣ-
 ರಾಯರು, ೭೫ರೂ., ರಾಮರಾಯರು, ಗಂರೂ. ೨೮. ಗಿ ಮೈ. ೨೯. ೬ಮೈ.
 ೩೦. ೮೬೦. ೩೧. ಗಿೞಂ, ೯೨೧. ೩೨. ಜಿ. ೩೩. ೫೪. ೩೪. ೬೩.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

ప్ర. ౨౦౦.

೩. ಭುಜಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ. ೪. ಕೋಟ್ಯಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ. ೫-
ಅರಂಭಸ್ಥಾನಮೊಳಗಿಂದ ಹಾಯುವದು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೩೮.

শ্রী. ১০৬.

೧. ಯ = ೨ಕ್ಷ + ೪. ೨. ಯ = ೨ಕ್ಷ - ೨. ೩. ೨ಕ್ಷ - ಯ + ೮ = ೦.
 ೪. ೨ಕ್ಷ - ೪ಯ = ೧೬. ೫. ೨ಕ್ಷ + ೨ಯ = ೧೫. ೬. ೪ಕ್ಷ - ೨ಯ +
 ೫ = ೦. ೭. ೨ಕ್ಷ - ೨ಯ = ೧೫. ೮. ೪ಕ್ಷ - ೫ಯ = ೪. ೯. ೨ಕ್ಷ - ೪ಯ
 + ೨ = ೦. ೧೦. ೨ಕ್ಷ + ೨ಯ = ೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

ಪು. ೨೨೪, ೨೨೫:

[illegible]

೧೩. ೪. ೧೪. —೧೨. ೧೫. ೩೩. ೧೬. —೩. ೧೭. ೨. ೧೮. ೩. ೧೯. —೧೨. ೨೦.—೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೦.

ಪು. ೨೩೪—೨೩೮.

೧. ೪೫; ೧೫; ೫; ೧೦. ೨. ೧೨ಶೇರು; ೨೫ಶೇರು. ೩. ೮|| ಗಂಟೆಗೆ ೧೦|| ಮೈಲೆನ ಮೇಲೆ, ೭|| ಮೈ.; ೬||. ೪. ೧೦|| ಗಂಟೆಗೆ ೩೬ ಮೈಲಿನಮೇಲೆ. ೫. ೮||. ೫. ೮ಮೈ; ೪ಮೈ; ೧೦||. ೬. ೫೩೩೦, ೧೧೩೦, ೨೩೩೩೦; ೫೩೩೦, ೭೩೦, ೧೦೩೩೦, ೭. ೨೦ಸೆಂ; ೩೦ಸೆಂ, ೬೦ ಸೆಂ. ೮೦ಫ, ೧೦೪ಫ; ೧೨೨. ೯. ೮. ೩೨. ೯. ೧೨. ೧೦. ೫. ೧೧. ೩೫; ೫೫ ೧೨. ೮೦೦ರೂ, ೭೦೦೦. ೧೩. ೮೨೫ ರೂ; ೫೦: ೨೦ ೧೪. ೧೪೦ರೂ; ೧೨. ೧೫. ೪೨೦ ರೂ; ೧೪೫. ೧೬. ೬೦ರ; ೪೦ರ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧ನೆಯದು.

ಪು. ೨೩೯.

೧. ೨೪; (ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)(ಯ-೪). ೨. ೨೪೪-ಯ೩ - ೩೪ಯ೨+೭೯ಯ-೩೦. ೩. ೨ (ಕ+ಗ+ಫ); (ಪ೨+ಪಮ+ಮ೨)/(ಪ+ಮ). ೪. ೩; ೧೨; ೧೫. ೫. ೬ರೂ. ೧೧೪. ೯ಮೈ ೭. ೨, ೩. ೮. ೫.

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೪೦.

೧. ೧೧; ೧೪. ೨. ೭; (ಯ-೫)(ಯ-೧)(೨ಯ೨+೭ಯ+೭). ೩. ೧; ೧೩(ಯ-೧) ೪. ಯ+೩; (ಯ+೩)(೨ಯ+೧)(೪ಯ+೩). (೨ಯ-೫)(೧೬ಯ-೧೫). ೫. —೨; ೮೦, —೧೦೦. ೬. (೨ಯ+೭ರ-೩)(೩ಯ+೩ರ+೨); ೭(ಯ+೩)(ಯ-೫)(೧-ಯ), ೬ಪ(ಪ-೨)(ಪ-೧)(ಪ÷೩), ೭. ೯ಹೊ. ೨೦ ಮಿ ; ೧೩೩ಮೈ. ೮. ೨೭.

ಪತ್ರಿಕೆ ೩ನೆಯದು.

ಪು. ೨೪೧.

೧. (ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ-೨)(ಯ+೨)(ಯ+೩); (ಯ೨+ಯ+೧)(ಯ೨+ಯ+೪); (ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ); ೨. ೧೫; ೯. ೩. ೧; (ಪ೪-೪೪) / ಪ೨೪. ೪. ೫;—೧೨, —೧೨. ೫. ೫;—೧೮. ೬. ೫೫೪೪೫. ೭. ೧೪೩೦, ೭. ೯ಹೊ, ೨೩೩ಮಿ; ೫ ೧೧೧ ೧೨೩ ಮೈ. ೧೪೫ ಮೈ. ೫ ೫೧೧೧

ಪತ್ರಿಕೆ ೪ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೪೩.

೧. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ+ಪ); (ಪ-ಬ+ಮ)(ಪ+ಬ-ಮ-೧);
 $\left(\frac{ಯ}{ಪ} + ೧ + \frac{ಅ}{ಮ} \right) \left(\frac{ಯ}{ಅ} - ೧ \frac{ಅ}{ಮ} \right)$. ೨. —೨; ಲ.

೩. $\frac{(ಯ-೨)(೩-ಯ)}{ಯ}$; $\frac{೨}{(ಪ-ಮ)}$ ೪. ೨೬೬; ೨, ೧. ೫.

೬೧೬೬, ೬. ೪೯; ೯೪. ೭. ೧, ೧; ೪೯೯+೨ = ೫, ೯೯+೪೨ = ೫.
 ಲ. ೩೦೦ ಮೈ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೫ ನೆಯದು.

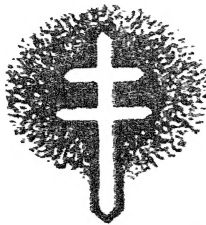
ಪು. ೨೪೪.

೨. (ಯ-೧)(೩ಯ-೧)(೫ಯ-೪) ; $\left(೨ಯ-೧ + \frac{೧}{೩ಯ} \right)$
 $\left(೪ಯ+೨ಯ + \frac{೧}{೩} + \frac{೧}{೩ಯ} + \frac{೧}{೯ಯ} \right)$; ಯರ(೨-ಯ)
 (೨+ಯ)(೨+ಯ). ೩. ೫, ೫, ೨. ೪. ೨೧/(ಯ-೫)(ಯ-೧೬);
 —೨ಬಮ/ಪ. ೫. ಯ-ಅಯ+೧. ೬. ೭೫ರೂ.; ೧೫೫ರೂ. ೧೦೦ ರೂ.
 ೭. ೧೧೬೦೦ರೂ.; ೩೪೦೦ರೂ. ಲ. ೮, ೧೫.

ಪತ್ರಿಕೆ ೬ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೪೬.

೧. (ಯ-೮)/(ಯ+೨). ೨. ಯ-೨೨;(ಯ-೨೨)(ಯ+೨)
 (ಯ+೨)(೩ಯ-೨ಯ+೨). ೩. (ಯ-೨)(ಯ+೧)(೪ಯ-೭);
 (೨ಯ-೨-೩೪)(೪ಯ+೨+೯೪+೨ಯರ-೩೪೪+೬೪ಯ) :
 (ಯ+೨-೫)(ಯ+೨+೮). ೪. ೫;—೨; ೨, ೨. ೬. ಪ+ಬ+ಮ-
 ೩ಯ. ೭. ೮೮. ಲ. ೮೮.



ಪ್ರಯೋಗದ ನಿವಾರಣೆಗೆ
ನಿರವಾಳಿ

EXPLICIT ALGEBRA, Part III (Kannada)

By P. S. Katti and V. P. Khanolkar

Price Rs. 2-4-0.

